1 階線型微分方程式を教えて気づくこと

秋田工業高等専門学校

自然科学系　吉井 洋二

1 階線型微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

通常のテクニック（我々の教科書の解法）

「両辺に $e^{\int P(x)dx}$ をかける」(multiply an integrating factor)

$$(y' + P(x)y)e^{\int P(x)}dx = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

すると、左辺は $ye^{\int P(x)}dx$ を微分した関数になっている。
よって、

$$ye^{\int P(x)}dx = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

故に、

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \tag{2}$$

なる公式を得る。

１．気づいたこと：
この公式は、覚えるのが大変なので、常に
「まず両辺に $e^{\int P(x)dx}$ をかけろ、そして $ye^{\int P(x)}dx$ を微分してみろ」、と教える。

大半はそうするが、ちゃんと公式を覚える学生もいる。
どちらがいいのだろう？
（答）　慣れてくれば公式を覚えることは有効だが、初心者には弊害である。

２．問題点：
微積分で習った不定積分のインテグラル $\int$ とここではちょっと意味が違う。どう違うのだろう？
微積分では、積分定数 C はインテグラを外してから出てくる。
微積分流では、$e^{\int P(x)dx}$ の逆数は $e^{-\int P(x)dx}$ とは言えない。

説明：
微積分では $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすれば、任意の定数 C に対して、$\int f(x)dx = F(x) + C$ を不定積分と呼んだ。

ところが、微分方程式の教科書では、$\int f(x)dx = F(x)$ と扱うのが普通である。つまり、$\int f(x)dx$ は $f(x)$ の原始関数を一つ固定した表現である。

この利点は、一般解を公式として書いたとき、どこに任意定数が現れるかがはっきりする。さらに、$e^{\int P(x)dx}$ や $e^{-\int P(x)dx}$ から任意定数は出てこないこともわかり、これらが互いに逆数であることもわかる。

[提案 1]　微積分でも微分方程式流に教えてはどうか？

[利点 1]

$$\int 2x dx = x^2$$

という学生の解答を減点しなくてよくなる。

[利点 2]
微分方程式の公式におけるインテグラルへの違和感が解消する。

[提案２]　斉次の場合、即ち、

$$y' + P(x)y = 0 \tag{3}$$

は、通常、変数分離型として解かせる。
もちろん、簡単な変数分離型の練習として意味はあるが、毎回この方法で解くのは煩わしい。そこで、(3) の解は公式として覚える：

$$y = Ae^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$

たとえば、$y' + 2y = 0$ なら $y = Ae^{-2x}$ である。
特性方程式が $t + 2 = 0$ より、解は $t = -2$、これを積分して $-2x$, e の肩に乗せて e^{-2x} を得る。
(3) の特性方程式も $t + P(t) = 0$ と考え、$t = -P(x)$ を積分して e の肩に乗せると考えると覚えやすい。

[提案３]
(1) を解くのに、まず 斉次の場合 (3) を解き、その解の任意定数を x の関数に変える方法（定数変化法）で教えてみよう。
具体的に、まず (3) を解いて、$y = Ae^{-\int P(x)dx}$ を得る（公式として覚えておけばここで時間はかからない）。
この任意定数 A を $A(x)$ に変えて解くわけである。即ち、

$$y = A(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{5}$$

を (1) に代入してみる。すると、

$$A'(x)e^{-\int P(x)dx} - A(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)A(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

となり、左辺の第二項と第三項が打ち消し合って、

$$A'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

を得る。

よって、

$$A'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

となり、

$$A(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \tag{6}$$

となって $A(x)$ が求まるわけである。従って、(5) に代入して再び公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

を得る。

例　$y' - 3y = x$ を解け。
解）　$y' - 3y = 0$ の一般解は $y = Ae^{3x}$ である。そこで、

$$y = A(x)e^{3x} \tag{7}$$

を与式に代入すると $A'(x)e^{3x} + 3A(x)e^{3x} - 3A(x)e^{3x} = x$ となるから、$A'(x) = xe^{-3x}$ を得る。よって

$$A(x) = \int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$$

となる。これを (7) に代入して一般解

$$y = e^{3x}(-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C) = Ce^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

を得る。
integral factor による解法とどちらが早いか？
（答）　早さはあまり変わらないが、この解き方の方が、覚えやすい。また、この手法は 2 階以上の微分方程式にも応用できるので、慣れておくと役立つ。