数学的顕微鏡

大阪教育大学 数理科学　　芦野 隆一

秋田工業高等専門学校　2011/03/25

1　はじめに

みなさんは MP3（エムピースリー）という言葉を聞いたことがありますか．iPod や音楽再生機能を搭載した携帯電話などの携帯型音楽プレーヤーでこの言葉を聞いた人もいるでしょう．12 cm の音楽 CD では 80 分の音声が収録できるのですが，携帯型音楽プレーヤーでは数日分以上の音声が収録できる機種もあります．この違いはどこにあるのでしょうか．実は 80 分の音声が収録できる CD でも MP3 という形式で音声を収録すれば何倍もの時間の音声を収録できるのです．これは，音声データを圧縮することによって可能になるのです．また，ディジタルカメラでは JPEG（ジェイペグ）と呼ばれる静止画像のディジタルデータを圧縮する方式が使われています．いろいろなところでデータの圧縮が行われているのです．ここでは，数学的顕微鏡と呼ばれ，圧縮だけではなく，FBI（アメリカ合衆国の連邦捜査局）の指紋照合システムなどのいろいろなデータ処理に使われているウェーブレットについて考えてみましょう．それは，みなさんのよく知っている平均から始まるのです．

2　平均と変化

数学の小テスト（10 点満点）が 8 回あって，A さんの点数は表 1 の通りであったとします．

回	1	2	3	4	5	6	7	8
点数	3	1	0	4	8	6	9	9

表 1: A さんの点数

A さんの点数を順番に並べたデータ列

$$(3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$$

を考えましょう．ここではデータを 1 列に並べたものをデータ列と呼ぶことにします．1, 2 回の平均，3, 4 回の平均，5, 6 回の平均，7, 8 回の平均はそれぞれ

$$\frac{3+1}{2} = 2, \qquad \frac{0+4}{2} = 2, \qquad \frac{8+6}{2} = 7, \qquad \frac{9+9}{2} = 9$$

となります．これらの平均は全く同じやり方で計算しています．文字を使って表せば，x と y の平均 x' は

$$x' = \frac{x+y}{2}$$

で求めているのです．これらの平均を 1 列に並べてデータ列

$$(2, 2, 7, 9)$$

を作ります．

それでは，1, 2 回の点数と 1, 2 回の平均との差を求めてみましょう．

$$3 - 2 = 1, \qquad 1 - 2 = -1$$

となります．この計算を文字で表すと，

$$x - \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{2}, \qquad y - \frac{x+y}{2} = -\frac{x-y}{2}$$

となります．この計算から，

$$(1\ 回の点数) - (1, 2\ 回の平均) = -\{\ (2\ 回の点数) - (1, 2\ 回の平均)\}$$

という式が，1, 2 回の点数が何点であっても成り立つことがわかります．この値を**変化**と呼ぶことにします．x と y の変化 y' は

$$y' = \frac{x-y}{2}$$

で求めます．y' は x から y に変わるときの変化量を $-\frac{1}{2}$ 倍した量であることに注意しましょう．

2 つのデータ x と y にそれらの平均 x' と変化 y' を対応させる対応 $(x, y) \to (x', y')$ を考えると，上に述べたことからその対応は

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+y}{2} \\[2ex] y' = \dfrac{x-y}{2} \end{cases} \tag{1}$$

で与えられます．この対応を**分解**と呼びます．この対応は x と y の連立方程式と考えることができます．連立方程式 (1) から x と y を求めると，

$$\begin{cases} x = x' + y', \\[2ex] y = x' - y' \end{cases} \tag{2}$$

となります．この逆の対応 $(x', y') \to (x, y)$ を**再構成**と呼びます．

x, y を幅 1 の棒グラフで表すと，図 1 の上の図となります．左下のグラフは $\dfrac{x+y}{2}$ を幅 2 の棒グラフで表した図であって，ちょうど上のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積と左下のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積は等しくなっています．右下のグラフは $\dfrac{x-y}{2}$ を幅 2 の棒グラフで表したグラフを平均のグラフの上に乗せた図であって，それはちょうど上のグラフに一致しているので，与えられたデータのグラフを左下の灰色部分グラフと右下の灰色部分のグラフの和に分解していると考えることができます．

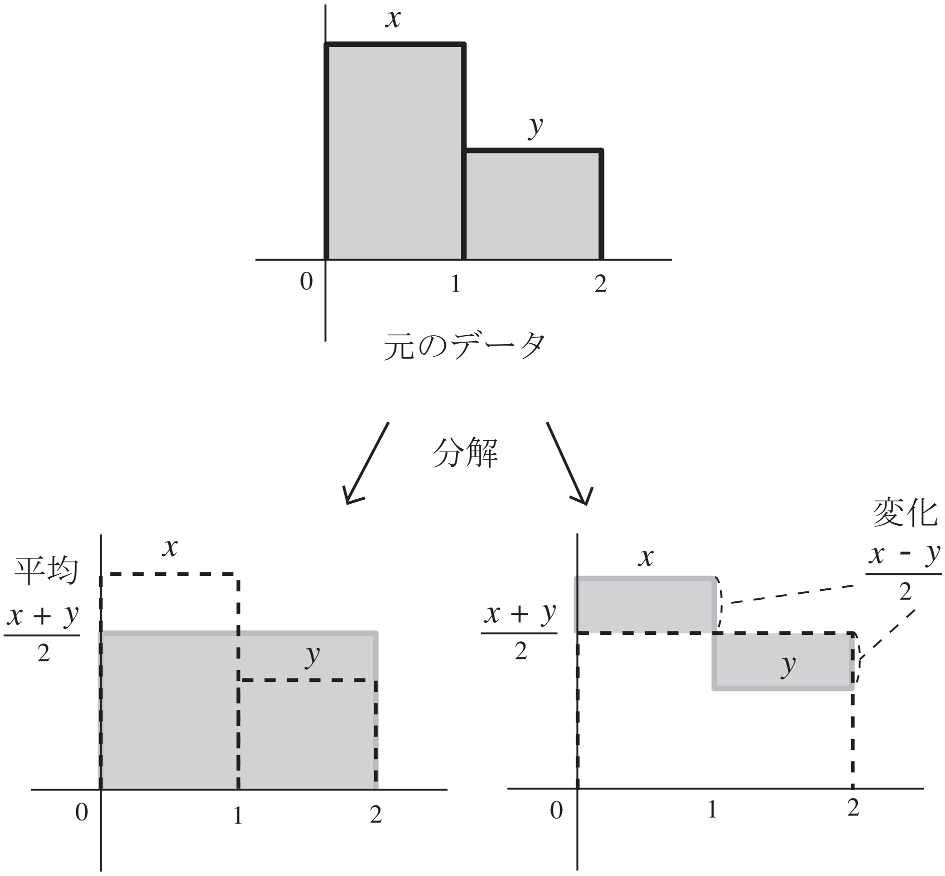

図 1: 平均と変化へ分解

A さんの点数の 1, 2 回の変化，3, 4 回の変化，5, 6 回の変化，7, 8 回の変化はそれぞれ

$$\frac{3-1}{2}=1, \qquad \frac{0-4}{2}=-2, \qquad \frac{8-6}{2}=1, \qquad \frac{9-9}{2}=0$$

となります．これらの変化を 1 列に並べてデータ列

$$(1,-2,1,0)$$

を作ります．

さらに，平均のデータ列と変化のデータ列を 1 列に並べてデータ列

$$(2,2,7,9 \mid 1,-2,1,0)$$

を作ります．ここで，平均のデータ列と変化のデータ列を区切るために | を使いました．このようにして作られたデータ列の対応

$$(3,1,0,4,8,6,9,9) \rightarrow (2,2,7,9 \mid 1,-2,1,0) \tag{3}$$

をデータ列の平均と変化への**レベル 1 の分解**と呼びます．逆の対応

$$(2,2,7,9 \mid 1,-2,1,0) \rightarrow (3,1,0,4,8,6,9,9) \tag{4}$$

を平均と変化から元のデータ列への**レベル 1 の再構成**と呼びます．

8 個のデータ列の平均と変化へのレベル 1 の分解の仕方をまとめると，

$$
\begin{aligned}
&(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\
&\qquad \xrightarrow{\text{(i)}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{x_5 + x_6}{2}, \frac{x_7 + x_8}{2} \mid \frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_3 - x_4}{2}, \frac{x_5 - x_6}{2}, \frac{x_7 - x_8}{2} \right)
\end{aligned} \tag{5}
$$

となります．ここで，(i) はレベル 1 の分解であることを表しています．レベル 1 の再構成の仕方をまとめると，

$$
\begin{aligned}
&(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 \mid y'_1, y'_2, y'_3, y'_4) \\
&\qquad \xrightarrow{\text{(i)}} (x'_1 + y'_1,\, x'_1 - y'_1,\, x'_2 + y'_2,\, x'_2 - y'_2,\, x'_3 + y'_3,\, x'_3 - y'_3,\, x'_4 + y'_4,\, x'_4 - y'_4)
\end{aligned} \tag{6}
$$

となります．

3　近似と詳細への分解と再構成

A さんが数学の小テストの 1, 2 回の点数と 1, 2 回の平均を比べようとしたとします．これは，データ列 $(3, 1)$ と 2 を比べることになります．よく考えてみると，私たち人間が一度に比べられるものは 2 つのものだけです．たとえば 3 つのもの X, Y, Z を比べるといっても，実際には 2 つのものを選んで（選び方は X と Y, X と Z, Y と Z の 3 通りあります）それぞれの場合に比べているのです．したがって，A さんは 1 回の点数と平均を比べて，そして 2 回の点数と平均を比べることになります．平均を比べる回数だけ並べてデータ列 $(2, 2)$ を作れば，データ列 $(3, 1)$ とデータ列 $(2, 2)$ を比べるというように一度に表すことができます．これはデータ列の構造が同じだからできることなのです．比べようとするものが同じ構造あるいは性質を持たなければ比べることはできません．たとえば，A さんの体重と B さんの体重の数値を比べる意味はありますが，A さんの体重と B さんの身長の数値を比べることにあまり意味があるとは思えません．

このように，元のデータ列と平均あるいは変化を比べようとすると，データ数が違うので（平均あるいは変化のデータ数は元のデータ数の半分になっている）直接には比較できません．そこで，平均あるいは変化から元のデータ列と比較できる同じデータ構造を持ったデータ列を作ります．平均から作られるデータ列を**近似**，変化から作られるデータ列を**詳細**と呼びます．作り方のヒントは図 1 の下図の灰色の部分にあります．図 2 のように，近似は $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$，詳細は $\left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2} \right)$ というデータ列を作ればよいのです．このように分解によって得られた近似のグラフと詳細のグラフを加えると，元のデータ列が再構成できることは図 3 からわかります．近似と詳細の求め方はそれぞれ変化の部分を 0，平均の部分を 0 として，式 (2) で再構成すればよいのです．

$$
\text{式 (2) による再構成：} \quad \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right) \to (x, y)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{近似：} &\quad \left(\frac{x+y}{2}, 0 \right) \to \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) \\
\text{詳細：} &\quad \left(0, \frac{x-y}{2} \right) \to \left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2} \right)
\end{aligned}
$$

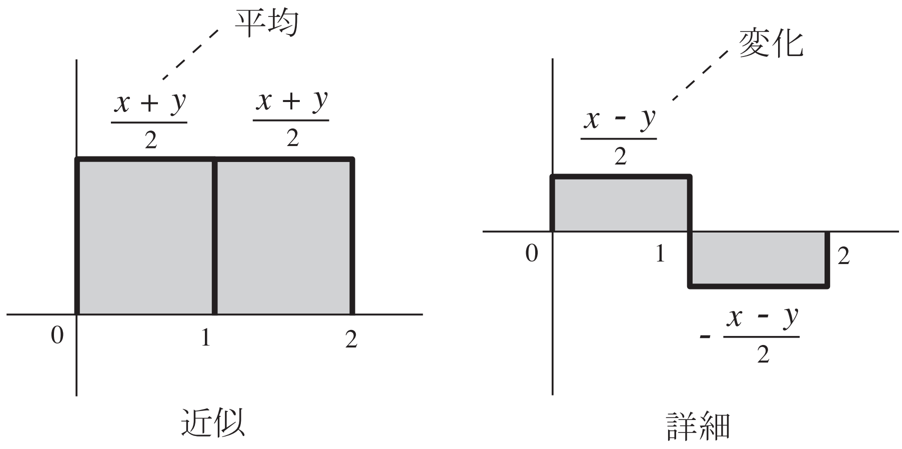

図 2: 近似と詳細のグラフ

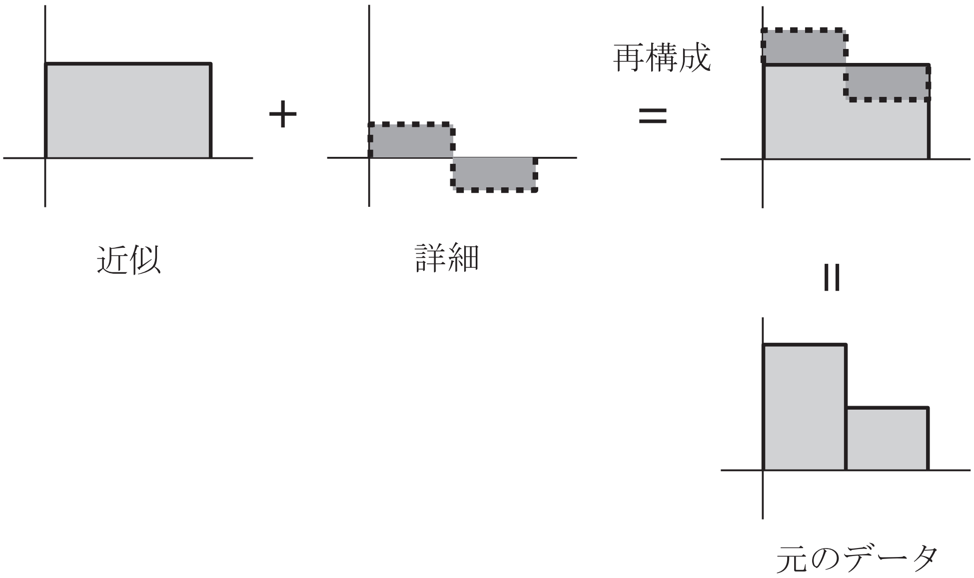

図 3: 近似と詳細から元のデータ列を再構成

これらの式からも近似と詳細を加えると元のデータ列が再構成できることがわかります．データ列の平均と変化へのレベル 1 の分解から作られた近似と詳細は，詳しくは**レベル 1 の近似**と**レベル 1 の詳細**と呼びます．

A さんの点数を順番に並べたデータ列のレベル 1 の分解は式 (3) ですから，変化をすべて 0 として式 (2) で再構成すると，レベル 1 の近似

$$\begin{aligned}
&(2, 2, 7, 9 \mid 0, 0, 0, 0) \\
&\to (2+0,\ 2-0,\ 2+0,\ 2-0,\ 7+0,\ 7-0,\ 9+0,\ 9-0) \\
&\to (2, 2, 2, 2, 7, 7, 9, 9)
\end{aligned}$$

が得られます．また，平均をすべて 0 として式 (2) で再構成すると，レベル 1 の詳細

$$\begin{aligned}
&(0, 0, 0, 0 \mid 1, -2, 1, 0) \\
&\to (0+1,\ 0-1,\ 0+(-2)\,, 0-(-2)\,, 0+1,\ 0-1,\ 0+0,\ 0-0) \\
&\to (1, -1, -2, 2, 1, -1, 0, 0)
\end{aligned}$$

が得られます．これらを図示すると図 4 のようになります．近似と詳細を加えると元のデータ

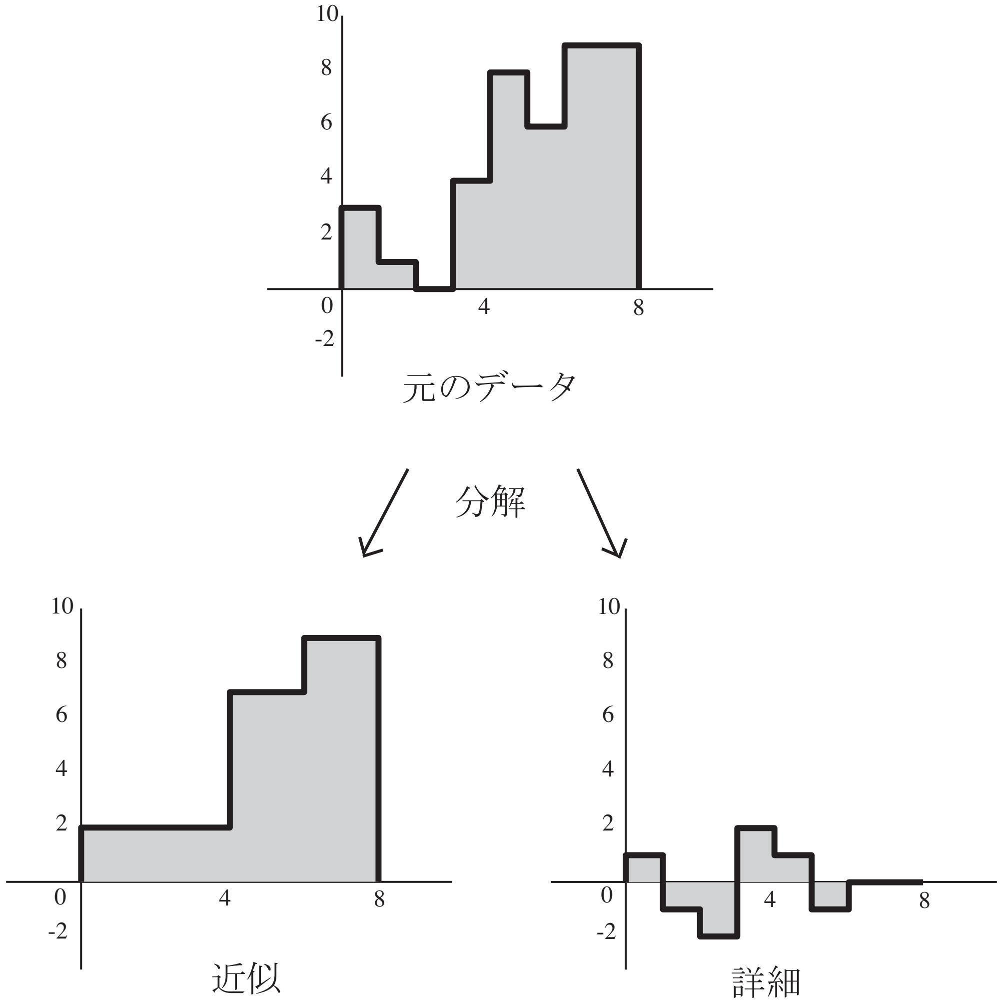

図 4: レベル 1 の近似とレベル 1 の詳細

列になることが，左から数えて同じ位置にある数どうしを加える

$$
\begin{aligned}
&(2,2,2,2,7,7,9,9)+(1,-1,-2,2,1,-1,0,0)\\
&\quad=(2+1,\ 2+(-1),\ 2+(-2),\ 2+2,\ 7+1,\ 7+(-1),\ 9+0,\ 9+0)\\
&\quad=(3,1,0,4,8,6,9,9)
\end{aligned}
$$

という計算で示せます．

8 個のデータ列の平均と変化へのレベル 1 の分解 (5) から作られるレベル 1 の近似の求め方をまとめると，

$$
\begin{aligned}
&(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4 \mid 0,0,0,0)\\
&\qquad\xrightarrow{\text{(i)}}(x'_1,x'_1,x'_2,x'_2,x'_3,x'_3,x'_4,x'_4)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となり，レベル 1 の詳細は

$$
\begin{aligned}
&(0,0,0,0 \mid y'_1,y'_2,y'_3,y'_4)\\
&\qquad\xrightarrow{\text{(i)}}(y'_1,-y'_1,y'_2,-y'_2,y'_3,-y'_3,y'_4,-y'_4)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

となります．ここで考えたデータ数は 8 個でしたが，データ数が偶数個であれば式 (1) から式 (5) を作ったやり方と同様にして分解と再構成が考えられます．実際の応用ではデータ数が数万個という場合もありコンピュータを使って計算します．データ数が奇数個のときは最後に 0 を付け加えて偶数個にして計算します．

4　多重レベル分解

自然界に存在する量はいろいろなスケールで変動しています．たとえば，気温には 1 年ごとに四季の変化，1 日ごとに昼夜の変化などがあり，いくつかの違ったスケール（時間の長さ）で周期的に変動しています．このような構造を**多重スケール構造**と呼びます．このように違ったスケールの変動をどうやって取り出せばよいのでしょうか．そのために，与えられたデータ列をレベル 1 の近似とレベル 1 の詳細に分解することはどんな意味があるのか考えてみましょう．図 4 を見ると，近似は平均から作られるので与えられたデータ列と比べるとゆっくり変動することがわかります．また，詳細は変化から作られるので与えられたデータ列の細かく速い変動を表していることがわかります．つまり，近似は与えられたデータ列のゆっくり変動する部分を取り出し，詳細は与えられたデータ列の速く変動する部分を取り出すのです．しかし，このままでは 2 つのスケールの変動を取り出しただけです．そこで考えられたのが，平均を与えられたデータ列だと思ってもう一度平均と変化へ分解することでした．この分解をデータ列の平均と変化への**レベル 2 の分解**と呼びます．そのためには平均のデータ数が偶数であることが必要ですが，前述のようにデータ数が奇数個のときは最後に 0 を付け加えて偶数個にして計算します．

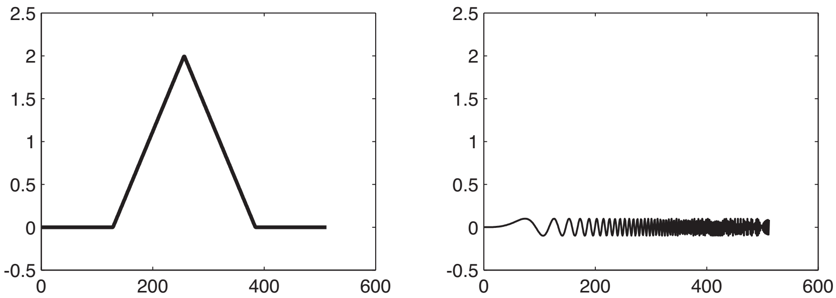

図 5: データ列の構成

このことを例で確かめてみましょう．図 5 のようなグラフを持った 2 つのデータ列を用意します．左側はゆっくりとした変動を表しています．右側は次第に速くなる変動です．この 2 つのデータ列を加えて図 6 の元のデータ列を構成しました．

図 6 のように，与えられたデータ列を式 (1) により平均と変化に分解して，次に，得られた平均を与えられたデータ列と考えて式 (1) を使って平均と変化に分解するという操作を繰り返し行うことができます．またこれらの平均あるいは変化をひとつ取って，その他はすべて 0 として式 (2) を使って分解していないレベル 0 まで戻せば，ひとつ取った平均あるいは変化に対応する近似あるいは詳細が構成できます．このように与えられたデータ列を平均と変化，あるいは近似と詳細に分解することを**多重レベル分解**と呼びます．最初の分解を**レベル 1 の分解**と呼び，以下順にレベル 2 の分解，レベル 3 の分解と呼びます．レベル 3 まで分解したとき，元のデータ列は平均 3，変化 3，変化 2，変化 1 から式 (2) を使って得ることができます．また，近似 3，詳細 3，詳細 2，詳細 1 を加えることによっても元のデータ列を再構成できます．分解

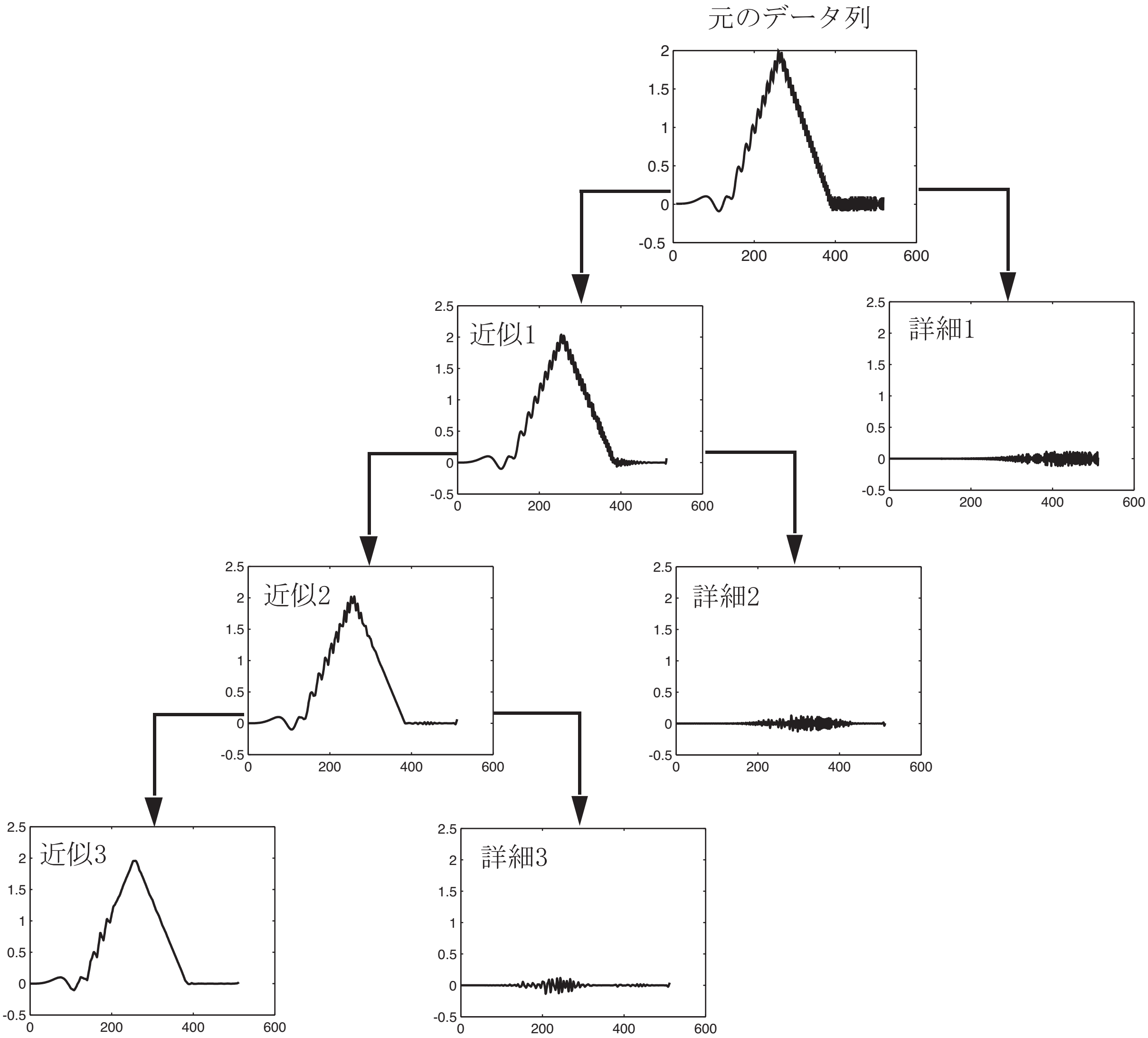

図 6: 多重レベルの分解

を繰り返してレベルが上がるにつれて，最も速い変動の詳細 1 が分離されて，次に速い変動の詳細 2 が分離されて，最後の中ぐらいの速さで変動する詳細 3 が順に分離されていることがわかります．

8 個のデータ列の平均と変化へのレベル 3 の分解の仕方をまとめると，次のようになります．

$$
\begin{aligned}
&(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\
&\xrightarrow{\text{(i)}} \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}, \frac{x_5+x_6}{2}, \frac{x_7+x_8}{2} \mid \frac{x_1-x_2}{2}, \frac{x_3-x_4}{2}, \frac{x_5-x_6}{2}, \frac{x_7-x_8}{2} \right) \\
&\xrightarrow{\text{(ii)}} \left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}, \frac{\frac{x_5+x_6}{2}+\frac{x_7+x_8}{2}}{2} \mid \right. \\
&\qquad \left. \frac{\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_3+x_4}{2}}{2}, \frac{\frac{x_5+x_6}{2}-\frac{x_7+x_8}{2}}{2} \mid \frac{x_1-x_2}{2}, \frac{x_3-x_4}{2}, \frac{x_5-x_6}{2}, \frac{x_7-x_8}{2} \right) \\
&= \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4} \mid \right. \\
&\qquad \left. \frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}, \frac{x_5+x_6-x_7-x_8}{4} \mid \frac{x_1-x_2}{2}, \frac{x_3-x_4}{2}, \frac{x_5-x_6}{2}, \frac{x_7-x_8}{2} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\xrightarrow{\text{(iii)}} \Bigg(\frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} + \frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}{2} \mid \frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} - \frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}{2} \mid \\
&\qquad \frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}, \frac{x_5+x_6-x_7-x_8}{4} \mid \frac{x_1-x_2}{2}, \frac{x_3-x_4}{2}, \frac{x_5-x_6}{2}, \frac{x_7-x_8}{2} \Bigg) \\
&= \Bigg(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}{8} \mid \frac{x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8}{8} \mid \\
&\qquad \frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}, \frac{x_5+x_6-x_7-x_8}{4} \mid \frac{x_1-x_2}{2}, \frac{x_3-x_4}{2}, \frac{x_5-x_6}{2}, \frac{x_7-x_8}{2} \Bigg)
\end{aligned}
$$

平均 1 では 2 個のデータの平均，平均 2 では $2^2 = 4$ 個のデータの平均，平均 3 では $2^3 = 8$ 個のデータの平均となっていることに注意しましょう．分解を繰り返してレベルが上がるにつれて，平均が次第にゆっくり変動する部分になっているのです．また変化は，分解を繰り返してレベルが上がるにつれて，2 個のデータの変化から 4 個のデータの変化，8 個のデータの変化へと細かく速い変動から次第に粗く遅い変動する部分になっていることがわかります．

A さんの点数を順番に並べたデータ列 $(3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$ のレベル 3 まで分解を求めてみましょう．

$$
\begin{aligned}
&(3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9) \\
&\to (2, 2, 7, 9 \mid 1, -2, 1, 0) \\
&\to (2, 8 \mid 0, -1 \mid 1, -2, 1, 0) \\
&\to (5 \mid -3 \mid 0, -1 \mid 1, -2, 1, 0)
\end{aligned}
$$

例えば，レベル 2 の分解は $(3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9) \to (2, 8 \mid 0, -1 \mid 1, -2, 1, 0)$ ですから，レベル 2 の近似はレベル 2 までの変化をすべて 0 として式 (2) を使って再構成すればよいわけです．つまり，

$$
\begin{aligned}
&(2, 8 \mid 0, 0 \mid 0, 0, 0, 0) \\
&\to (2+0,\ 2-0,\ 8+0,\ 8-0 \mid 0, 0, 0, 0) \\
&\to (2+0,\ 2-0,\ 2+0,\ 2-0,\ 8+0,\ 8-0,\ 8+0,\ 8-0) \\
&\to (2, 2, 2, 2, 8, 8, 8, 8)
\end{aligned}
$$

です．

5　データ圧縮の原理

A さんの点数を順番に並べたデータ列のレベル 3 の分解を使ってデータ圧縮の原理を考えてみましょう．

可逆圧縮

元のデータ列 $(3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$ と最後のレベル 3 の分解 $(5 \mid -3 \mid 0, -1 \mid 1, -2, 1, 0)$ を比較すると，レベル 3 の分解の方が 0 が多いことに注目しましょう．多くのデータではこのような分解によって 0 が増えることが経験的に知られています．実は 0 が多いほどコンピュータに

記憶させるのに必要なメモリーが少なくて済むのです．たとえば，ノートに 1 桁の数を 100 個書く場合と 2 桁の数を 100 個書く場合では，明らかにノートの使用量が違います．これがデータ圧縮の原理です．この過程を逆にたどることによって，最後のレベル 3 の分解から元のデータが完全に再現できます．このような圧縮を**可逆圧縮**と呼びます．ある種のデータ処理を行うことによって 0 を増やしてデータを圧縮する方法は，たとえばモデムによる通信などで使われています．

非可逆圧縮

ここで，最後のレベル 3 の分解 $(5 \mid -3 \mid 0,-1 \mid 1,-2,1,0)$ の変化部分 $(\bullet \mid -3 \mid 0,-1 \mid 1,-2,1,0)$ で絶対値の小さい変化を無視してみましょう．つまり，$(\bullet \mid -3 \mid 0,0 \mid 0,-2,0,0)$ とします．そして，レベル 3 の分解 $(5 \mid -3 \mid 0,0 \mid 0,-2,0,0)$ が与えられたとして元のデータ列を再構成してみましょう．

$$\begin{aligned}
&(5 \mid -3 \mid 0,0 \mid 0,-2,0,0) \\
&\to (2,8 \mid 0,0 \mid 0,-2,0,0) \\
&\to (2,2,8,8 \mid 0,-2,0,0) \\
&\to (2,2,0,4,8,8,8,8)
\end{aligned}$$

得られた $(2,2,0,4,8,8,8,8)$ は値の小さい変化を無視して再構成したデータ列となります．この値の小さい変化を無視して再構成したデータ列と元のデータ列を比較したのが図 7 です．

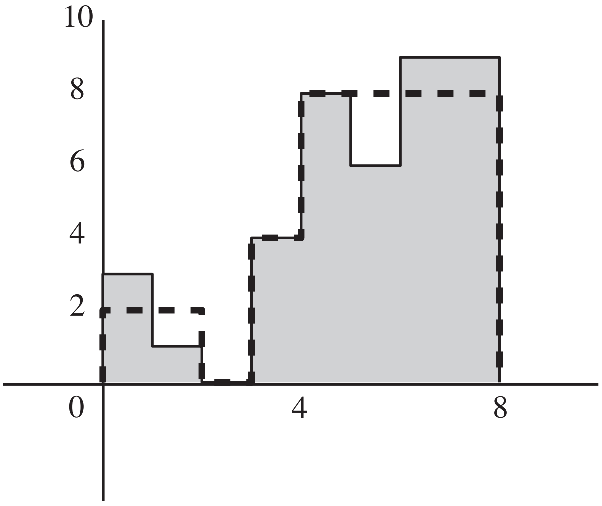

図 7: 元のデータ列（実線）と値が小さい速い変化を無視して再構成したデータ列（破線）

分解されたデータを比較すると，元のデータの場合は $(5 \mid -3 \mid 0,-1 \mid 1,-2,1,0)$ であり，値の小さい変化を無視したデータ列の場合は $(5 \mid -3 \mid 0,0 \mid 0,-2,0,0)$ です．値の小さい変化を無視したデータ列の方が 0 が多いことに注目しましょう．この場合は元のデータ列を完全には再現できませんが，少ないデータ量から元のデータ列に近いデータ列を得ることができるのです．このような圧縮を**非可逆圧縮**と呼びます．このことは元のデータ列を完全に再現できませんが，データ量が少なくなった分データ送信にかかる時間が短縮できて，より高速に情報の概要を伝達できるということを示しています．これと同様なデータ圧縮の原理（**JPEG** と呼ばれる）がディジタルカメラなどで使われているのです．

6　2 次元データの分解

次に画像について考えてみましょう．白黒の**ディジタル画像**とは，0 から 1 までの値の数を順序も考えて長方形の形に並べたものといえます．数学では，このように数を順序も考えて長方形の形に並べた 2 次元データを**行列**と呼びます．行列の横方向に並んだデータ列を**行**と呼び，縦方向に並んだデータ列を**列**と呼びます．ディジタル画像ではそれぞれの数は**画素**または**ピクセル**と呼ばれ，0 は黒に対応し，1 は白に対応します．図 8 を参照してください．灰色は 0 か

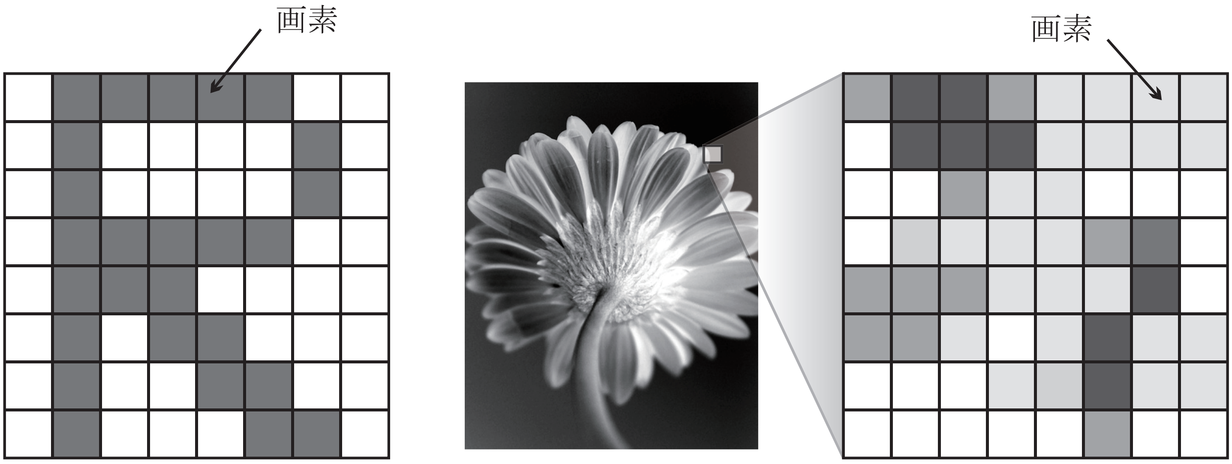

図 8: ディジタル画像の画素

ら 1 の間の値に対応します．通常のコンピュータはハードウェアの規格上 $2^8 = 256$ 段階（**階調**という）の値しかとれないので，0 から 255 の整数値を並べる場合もあります．したがって，実際には 0 と 1 との間の (0 と 1 を含めて) 256 個の点に対応する灰色しかディスプレイ上に実現できないことになります．

2 次元データの分解は，横方向に各行を 1 次元データ列と見なして式 (2) を使って分解した後，縦方向に各列を 1 次元データ列と見なして式 (2) を使って分解すればよいのです．この場合，初めに縦方向に式 (2) を使ってから横方向に式 (2) を使っても得られる結果は同じです．まず，横に 2 個のデータ，縦に 2 個のデータを並べた行列（これを 2×2 **行列**という）に対して，横方向に各行を式 (2) を使って分解すると，

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_{1,1}+x_{1,2}}{2} & \dfrac{x_{1,1}-x_{1,2}}{2} \\ \dfrac{x_{2,1}+x_{2,2}}{2} & \dfrac{x_{2,1}-x_{2,2}}{2} \end{pmatrix}$$

となります．次に縦方向に各列を式 (2) を使って分解すると，

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_{1,1}+x_{1,2}}{2} & \dfrac{x_{1,1}-x_{1,2}}{2} \\ \dfrac{x_{2,1}+x_{2,2}}{2} & \dfrac{x_{2,1}-x_{2,2}}{2} \end{pmatrix} \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ \begin{pmatrix} \dfrac{(x_{1,1}+x_{1,2})+(x_{2,1}+x_{2,2})}{4} & \dfrac{(x_{1,1}-x_{1,2})+(x_{2,1}-x_{2,2})}{4} \\ \dfrac{(x_{1,1}+x_{1,2})-(x_{2,1}+x_{2,2})}{4} & \dfrac{(x_{1,1}-x_{1,2})-(x_{2,1}-x_{2,2})}{4} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

となります．つまり，対応

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \dfrac{x_{1,1}+x_{1,2}+x_{2,1}+x_{2,2}}{4} & \dfrac{x_{1,1}-x_{1,2}+x_{2,1}-x_{2,2}}{4} \\ \dfrac{x_{1,1}+x_{1,2}-x_{2,1}-x_{2,2}}{4} & \dfrac{x_{1,1}-x_{1,2}-x_{2,1}+x_{2,2}}{4} \end{pmatrix}$$

が 2×2 行列に対する 2 次元データの分解です．2 次元データの再構成は，対応

$$\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} y_{1,1}+y_{1,2}+y_{2,1}+y_{2,2} & y_{1,1}-y_{1,2}+y_{2,1}-y_{2,2} \\ y_{1,1}+y_{1,2}-y_{2,1}-y_{2,2} & y_{1,1}-y_{1,2}-y_{2,1}+y_{2,2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

によって与えられます．

与えられた画像，つまり行列を 2×2 行列に分割し，それぞれの行列に上の行列に対するハール変換を適用します．得られる結果は 2×2 行列ですから，それぞれの 2×2 行列から左上，右上，左下，右下を取り出して，左上の数だけからなる行列，右上の数だけからなる行列，左下の数だけからなる行列，右下の数だけからなる行列を作ると図 9 が得られます．左上の数だけからなる行列が平均であり，残り 3 つの行列が変化です．これらの変化には，それぞれ横，縦，斜めの**エッジ**と呼ばれる境界部分が分離されていることに注目してください．これがレベル 1 の分解であり，再構成していないので，それぞれの左上の数だけからなる行列，右上の数だけからなる行列，左下の数だけからなる行列，右下の数だけからなる行列に並べられた画素数は元の画像の画素数の 4 分の 1 になっていることに注意しましょう．

図 9: 2 次元データの分解例

2 次元データの再構成が (9) で与えられることから，右の 4 枚の画像を単に重ね合わせても左の元の画像が得られないことに注意してください．

7 結び

これでウェーブレットとその応用の話は終わりますが，自然界に存在するいろいろな量が多重スケール構造を持つことが理解できたましたか．また，ウェーブレットの多重レベルの分解によってその多重スケール構造を調べることができることが実感できましたか．みなさんもいろいろな多重スケール構造を探してください．きっとわくわくするような発見があるに違いありません．