

代数構造の幾何学的様相

末信 郁也

久保 富士男

広島大学大学院工学研究科

第 27 回リー代数サマーセミナー
平成 23 年 8 月 22 日

はじめに

- 2次元の $\mathbb{R}$ 上結合代数の分類に関する論文¹の紹介と、並びに我々の研究結果²との比較、関連性について調べた結果を発表したいと思います。

1. J. M. A. Bermúdez, J. Fresán, J. S. Hernández, “On the variety of two dimensional real associative algebras”, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **26**(2007), pp. 1293-1305.
2. F. Kubo, F. Suenobu, “On the associative algebra structures closest to algebra structures”, *Journal of Algebra and its Applications*, **10**, pp.365-376(2011).

諸定義

- 基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ に持つ実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を V とする.
- V 上の積 ' $\circ$ ' をもつ結合代数を A とし, A の構造定数を $(c_{ijk}) \in \mathbb{R}^{n^3}$ とする:

$$e_i \circ e_j = \sum_{k=1}^n c_{ijk} e_k.$$

- 構造定数 (c_{ijk}) は以下の n^4 個の条件式を満たす.

$$\sum_{p=1}^n (c_{ijp} c_{pkq} - c_{jkp} c_{ipq}) = 0 \quad (i, j, k, q = 1, \dots, n) \quad (1)$$

- $n = 2$ の場合の (1) を満たす代数的集合を $\mathfrak{C}$ とおく.

諸定義

定義

V 上対称双線形写像 $\phi : V \times V \rightarrow V$ が

$$\phi(\phi(x, x), \phi(x, y)) - \phi(x, \phi(\phi(x, x), y)) = 0 \quad x, y \in V$$

を満たすとき, (V, ϕ) を **ジョルダン代数** という.

定義

V 上歪対称双線形写像 $\mu : V \times V \rightarrow V$ が

$$\mu(\mu(x, y), z) + \mu(\mu(y, z), x) + \mu(\mu(z, x), y) = 0$$

$$x, y, z \in V$$

を満たすとき, (V, μ) を **リー代数** という.

$\mathfrak{C}$ のパラメータ表示

定理

$\mathfrak{C} \in \mathbb{R}^8$ を (1) を満たす代数的集合とする. このとき, $\mathfrak{C}$ は次のようにパラメータ表示できる.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \cup \mathfrak{C}_3 \cup \mathfrak{C}_4 \cup \mathfrak{C}_5;$$

$$\mathfrak{C}_1 = \{(\alpha, 0, \beta, 0, 0, \alpha, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{C}_2 = \{(\alpha, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{C}_3 = \{(\alpha, 0, 0, \alpha, \beta, 0, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{C}_4 = \{(\alpha, \beta, \gamma, 0, \gamma, 0, 0, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{C}_5 = \{(\alpha - p\gamma + p^2\beta, p\alpha, p\beta, \alpha, p\beta, \alpha, \beta, \gamma) \mid \\ \alpha, \beta, \gamma, p \in \mathbb{R}\}$$

ただし, $\mathfrak{C}_2 \subseteq \mathfrak{C}_4 \cup \mathfrak{C}_5$ である.

分類の方針

命題

- ① $\phi(x, y) = (x \circ y + y \circ x)/2$ はジョルダン積となる.
- ② $\mu(x, y) = (x \circ y - y \circ x)/2$ はリー積となる.

- 結合代数 A の積 ' $\circ$ ' は $x, y \in A$ に対して

$$\begin{aligned}x \circ y &= \frac{x \circ y + y \circ x}{2} + \frac{x \circ y - y \circ x}{2} \\&= \phi(x, y) + \mu(x, y),\end{aligned}$$

を満たす.

- 2次元のリー積は歪対称性のみを満たせばよい.
- 2次元の $\mathbb{R}$ 上ジョルダン代数の分類を用いて, 結合代数の分類を行う.

ジョルダン代数の分類

定理

ϕ を 2次元の V 上ジョルダン積とする. ϕ は以下の非同型なジョルダン積 $\phi_1, \dots, \phi_6$ のいずれかに同型となる.

1. $\phi_1(e_1, e_1) = e_1, \phi_1(e_1, e_2) = e_2, \phi_1(e_2, e_2) = -e_1.$
2. $\phi_2(e_1, e_1) = e_1, \phi_2(e_1, e_2) = e_2, \phi_2(e_2, e_2) = e_1.$
3. $\phi_3(e_1, e_1) = e_1, \phi_3(e_1, e_2) = e_2, \phi_3(e_2, e_2) = 0.$
4. $\phi_4(e_1, e_1) = 0, \phi_4(e_1, e_2) = 0, \phi_4(e_2, e_2) = e_2.$
5. $\phi_5(e_1, e_1) = e_2, \phi_5(e_1, e_2) = 0, \phi_5(e_2, e_2) = 0.$
6. $\phi_6(e_1, e_1) = e_1, \phi_6(e_1, e_2) = \frac{1}{2}e_2, \phi_6(e_2, e_2) = 0.$

結合代数の分類

- 2次元のリ一積 μ は, $a, b \in \mathbb{R}$ としたとき,

$$\mu(e_1, e_1) = 0, \quad \mu(e_1, e_2) = ae_1 + be_2,$$

$$\mu(e_2, e_1) = -ae_1 - be_2, \quad \mu(e_2, e_2) = 0,$$

と表せる.

- それぞれの $\phi_i + \mu$ ($i = 1, \dots, 6$) に対して, 式 (1) を満たすよう a, b を定める.

結合代数の分類

- ϕ_1 の場合について考える. $\phi_1 + \mu$ の構造定数 (c_{ijk}) の集合は

$$\{(1, 0, a, 1 + b, -a, 1 - b, -1, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

となる.

- 式 (1) に $(i, j, k, q) = (2, 2, 2, 1), (2, 2, 2, 2)$ を代入すると

$$c_{221}(c_{121} - c_{211}) = 0$$

$$c_{221}(c_{122} - c_{212}) = 0$$

が得られる.

- この2式から $a = b = 0$ を得ることができ, 残りの条件式も全て満たすことが確認できる.
- $\phi_1, \dots, \phi_5$ までは全て $a = b = 0$ である.

結合代数の分類

定理

β を 2次元の V 上結合積とする. β は以下の表の構造定数をもつ非同型な結合積 $\beta_1, \dots, \beta_7$ のいずれかに同型となる.

1. $\beta_1 : (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, -1).$
2. $\beta_2 : (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1).$
3. $\beta_3 : (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0).$
4. $\beta_4 : (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$
5. $\beta_5 : (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$
6. $\beta_6 : (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0).$
7. $\beta_7 : (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0).$

β_i と $\mathfrak{C}$ の関係

$$\begin{array}{ll} \beta_1 : (1, 0, 0, 1, 0, 1, -1, 0) & \parallel (\in \mathfrak{C}_5) \\ \beta_2 : (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) & \parallel (\in \mathfrak{C}_5) \\ \beta_3 : (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) & \parallel (\in \mathfrak{C}_5) \\ \beta_4 : (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) & \parallel (\in \mathfrak{C}_5) \\ \beta_5 : (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) & \parallel (\in \mathfrak{C}_4) \\ \beta_6 : (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) & \parallel (\in \mathfrak{C}_3) \\ \beta_7 : (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) & \parallel (\in \mathfrak{C}_1) \end{array}$$

- 各 β_i の軌道が、我々が求めた $\mathfrak{C}_j$ のどの部分にあるのかを調べた.

β_i の軌道

- 構造定数 (c_{ijk}) を 4×2 の行列で表す:

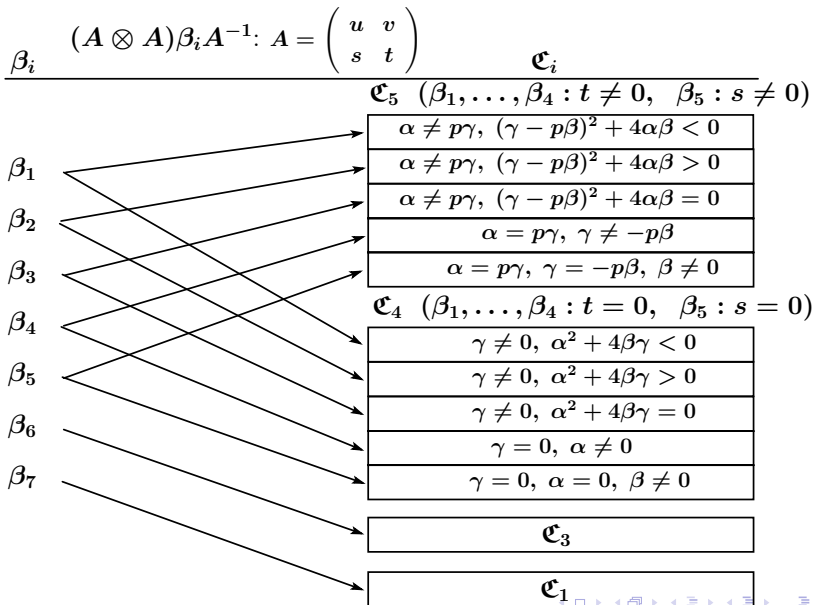
$$\begin{pmatrix} c_{111} & c_{112} \\ c_{121} & c_{122} \\ c_{211} & c_{212} \\ c_{221} & c_{222} \end{pmatrix}$$

- 積 β_i に同型な積 β'_i は以下の式により与えられる:

$$\beta'_i = (A \otimes A)\beta_i A^{-1}.$$

ここに, A は 2×2 の実正則行列である.

β_i の軌道と $\mathfrak{C}_j$ の比較



代数の縮約

- 2×2 行列 $A(t)$ を以下のように与える:

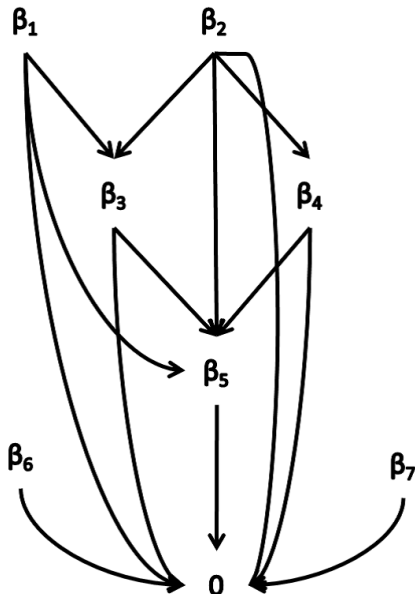
$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix},$$

$$a(t)d(t) - b(t)c(t) \begin{cases} \neq 0 & (t \neq 0) \\ = 0 & (t = 0) \end{cases}.$$

- 以下の極限が存在するとき, β_0 が β_i の縮約である.

$$\beta_0 = \lim_{t \rightarrow 0} (A(t) \otimes A(t)) \beta_i A(t)^{-1}$$

代数の縮約



$\mathfrak{C}_5 \ (\beta_1, \dots, \beta_4 : t \neq 0, \ \beta_5 : s \neq 0)$

β_1	$\alpha \neq p\gamma, (\gamma - p\beta)^2 + 4\alpha\beta < 0$
β_2	$\alpha \neq p\gamma, (\gamma - p\beta)^2 + 4\alpha\beta > 0$
β_3	$\alpha \neq p\gamma, (\gamma - p\beta)^2 + 4\alpha\beta = 0$
β_4	$\alpha = p\gamma, \gamma \neq -p\beta$
β_5	$\alpha = p\gamma, \gamma = -p\beta, \beta \neq 0$

$\mathfrak{C}_4 \ (\beta_1, \dots, \beta_4 : t = 0, \ \beta_5 : s = 0)$

β_1	$\gamma \neq 0, \alpha^2 + 4\beta\gamma < 0$
β_2	$\gamma \neq 0, \alpha^2 + 4\beta\gamma > 0$
β_3	$\gamma \neq 0, \alpha^2 + 4\beta\gamma = 0$
β_4	$\gamma = 0, \alpha \neq 0$
β_5	$\gamma = 0, \alpha = 0, \beta \neq 0$
β_6	$\mathfrak{C}_3$
β_7	$\mathfrak{C}_1$