

アフィンルート系の基本系の存在定理 について

山根 宏之 (大阪大 情報)

2012. 8. 25 山口大学

第28回 リー代数 サマリー セミナー

§1 $(n-1)$ 拡大 アフィンルート系

§2 アフィンルート系 について

§3 セールの定理

§4 $n=2, l=1$ の場合 について

§5 アフィンリー代数のドリルフェルト関係式

§6 楕円リー代数

§1 (n-)拡大ファンルート系

定義 $l \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。

V を $(l+n)$ -次元 $\mathbb{R}$ -線形空間とし

$(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を半正定値対称形式

とする。

$$V^0 := \{v \in V \mid (v, v) = 0\} \text{ とする。}$$

$$V^+ := \{v \in V \mid (v, v) > 0\} \text{ とする。}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ V \setminus V^0 \end{array}$$

$R \subset V$ (詳しくは (R, V)) が階数 l ,

零度 n の拡大ファンルート系である

とは次の (AX1) ~ (AX4) をみたすときに

いふ。

$$(AX1) \quad R \subset V^+, \quad V = \mathbb{R}R (= \text{Span}_{\mathbb{R}}(R))$$

$$(AX2) \quad \text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}R = \dim V (= l+n)$$

$$(AX3) \quad \forall \alpha, \beta \in R \quad \begin{array}{c} \text{Span}_{\mathbb{Z}}(R) \\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \text{ かつ } s_{\alpha}(\beta) \in R \end{array}$$

$$(AX4) \quad \forall \alpha, \beta \in R, \exists m \in \mathbb{N}, \exists p \in R \quad \begin{array}{c} \text{Span}_{\mathbb{Z}}(R) \\ (\alpha, \beta) \neq 0, (\alpha, \beta_{p+1}) \neq 0, (\alpha_m, \beta) \neq 0. \end{array}$$

注: $\mathbb{Z}R$ は階数 $\overset{\dim V}{l+n}$ の自由 $\mathbb{Z}$ -加群
(自由アーベル群) No. ②

補題 次の (あ) ~ (え) をみたす V の元

$\underbrace{x_1, \dots, x_{l+n}}_{l+n}$ が存在する。

(あ) $\underbrace{x_1, \dots, x_{l+n}}_{l+n}$ は V の $\mathbb{R}$ -基

$$V = \bigoplus_{i=1}^{l+n} \mathbb{R} x_i$$

$$\dim_{\mathbb{R}} V = l+n$$

(い) $\underbrace{x_{l+1}, \dots, x_n}_n$ は V^0 の $\mathbb{R}$ -基

$$V^0 = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R} x_{l+j}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} V^0 = n$$

(う) $x_1, \dots, x_{l+n}$ は $\mathbb{Z}R$ の $\mathbb{Z}$ -基

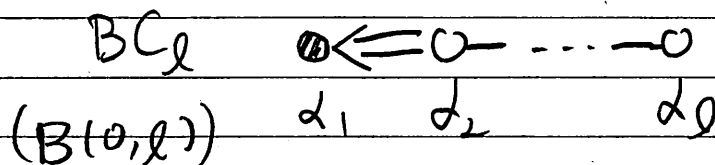
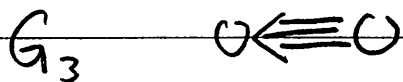
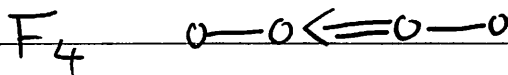
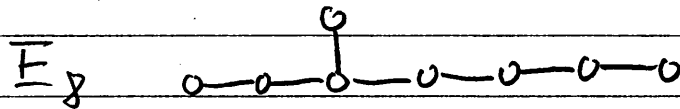
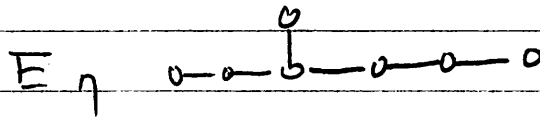
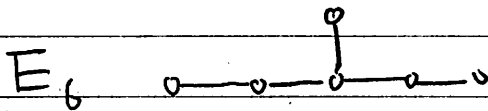
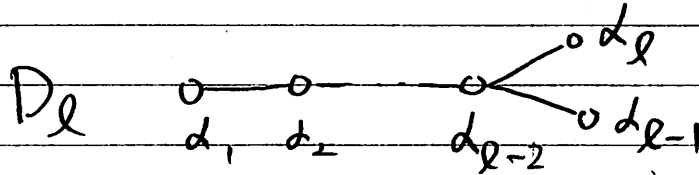
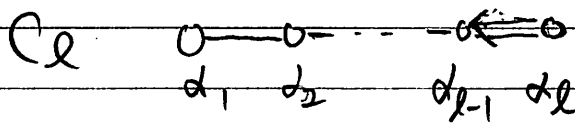
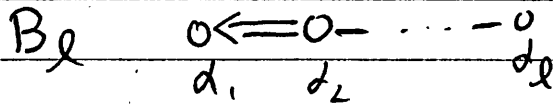
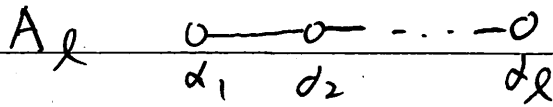
$$\mathbb{Z}R = \bigoplus_{i=1}^{l+n} \mathbb{Z} x_i \quad \text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}R = l+n$$

(え) $\underbrace{x_{l+1}, \dots, x_n}_{n}$ は $(\mathbb{Z}R)^0$ の $\mathbb{Z}$ -基

$$V^0 \cap \mathbb{Z}R = \{y \in \mathbb{Z}R \mid (y, y) = 0\}$$

$$(\mathbb{Z}R)^0 = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z} x_{l+j} \quad \text{rank}_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}R)^0 = n$$

$n=0$ のとき R は (有限) 単純ルート系である。



$n=1$ のとき R を アフィンルート系 といい。

$n=2$ のとき R を 楕円ルート系 といい。

$\pi: V \rightarrow V/V^0$ を標準的射影とする。

このとき $\pi(R)$ は $\mathbb{P}$ 階数 l の単純ルート系である。
 $\parallel$
 R の階数

定義 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{l+n}\}$ が R の 基本系 であるとは次の (あ) ~ (う) をみたすときにいう。

(あ) $\Pi \subset R$, $|\Pi| = l+n$

(い) Π は $\mathbb{Z}R$ の $\mathbb{Z}$ -基 である。

(う) $\forall \alpha \in R \exists \varepsilon \in \{\pm 1\} \exists m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} (1 \leq i \leq l+n)$

$$\alpha = \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{l+n} m_i \alpha_i$$

§2 アフィンルート系について

補題 $l=n=1$ とする。 $\delta \in (\mathbb{Z}R)^0 = \mathbb{Z}\delta$ と

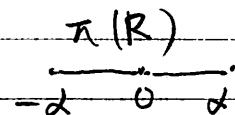
なるものとする。 $\alpha \in R$ を $\{\pi(\alpha)\}$ が $\pi(R)$ の

基本系となるものとする。このとき R は次の

(あ) ~ (か) のどれかである。

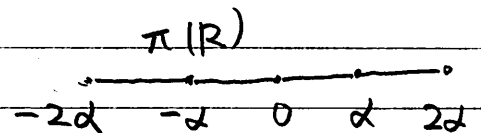
(あ) $R = \pm\alpha + \mathbb{Z}\delta$

$$A_1^{(1)} \quad 0 \Longleftrightarrow 0 \\ \alpha \quad -\alpha + \delta$$



(い) $R = (\pm\alpha + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm 2\alpha + (2\mathbb{Z}+1)\delta)$

$$A_2^{(2)} \quad 0 \Longleftrightarrow 0 \\ \alpha \quad -2\alpha + \delta$$



(う) $R = (\pm\alpha + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm 2\alpha + \mathbb{Z}\delta)$

$$B^{(1)}(0,1) \quad 0 \Longleftrightarrow 0 \\ \alpha \quad -2\alpha + \delta$$

(え) $R = (\pm\alpha + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm 2\alpha + 2\mathbb{Z}\delta)$

$$C^{(2)}(0) \quad 0 \Longleftrightarrow 0 \\ \alpha \quad -\alpha + \delta$$

$$(お) \quad R = (\pm\alpha + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm 2\alpha + 4\mathbb{Z}\delta)$$

$$A^{(4)}(0, 2) \quad \begin{array}{c} \circledast \Longleftrightarrow 0 \\ \alpha \quad -\delta + \delta \end{array}$$

$$(か) \quad R = (\pm\alpha + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm 2\alpha + (4\mathbb{Z} + 2)\delta)$$

$$A^{(4)}(0, 2) \quad \begin{array}{c} 0 \Longleftrightarrow \circledast \\ \alpha \quad -\delta + \alpha \end{array}$$

補題 $l=2, n=1$ とする。 δ を $(\mathbb{Z}R)^\circ = \mathbb{Z}\delta$

となるものとする。 $\alpha, \beta \in R$ を $\{\pi(\alpha), \pi(\beta)\}$ が

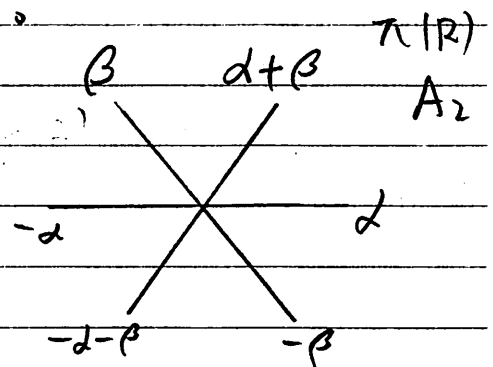
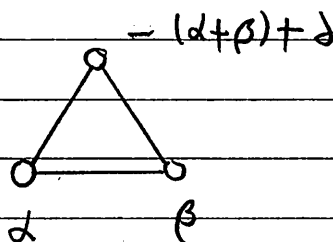
$\pi(R)$ の基本系となるものとする。このとき R は

次の (あ) ~ (き) のどれかである。以下で

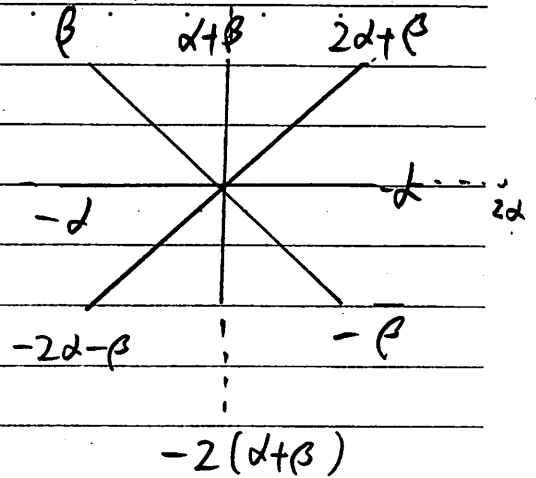
は $(\alpha, \alpha) \leq (\beta, \beta)$ を仮定する。

(き) $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta)$ のとき

$$(あ) \quad R = \pm\{\alpha, \alpha + \beta, \beta\} + \mathbb{Z}\delta$$

 $A_2^{(1)}$


(1) $(\beta, \beta) = 2(\alpha, \alpha)$ のとき



(ii)

$$R = \pm\{\alpha, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta, \beta\} + \mathbb{Z}\delta$$

$$C_2^{(1)} \quad \begin{array}{ccccc} \circ & \rightleftharpoons & \circ & \rightleftharpoons & \circ \\ \alpha & & \beta & & -2(\alpha+\beta)+\delta \end{array}$$

(iii)

$$R = (\pm\{\alpha, \alpha+\beta\} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm\{2\alpha+\beta, \beta\} + 2\mathbb{Z}\delta)$$

$$D_3^{(2)} \quad \begin{array}{ccccc} \circ & \rightleftharpoons & \circ & \rightleftharpoons & \circ \\ \alpha & & \beta & & -(\alpha+\beta)+\delta \end{array}$$

(iv)

$$R = (\pm\{\alpha, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta, \beta\} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm\{2\alpha, 2(\alpha+\beta)\} + (2\mathbb{Z}+1)\delta)$$

$$A_4^{(2)} \quad \begin{array}{ccccc} \circ & \rightleftharpoons & \circ & \rightleftharpoons & \circ \\ \alpha & & \beta & & -2(\alpha+\beta)+\delta \end{array}$$

(v)

$$R = (\pm\{\alpha, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta, \beta\} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm\{2\alpha, 2(\alpha+\beta)\} + 2\mathbb{Z}\delta)$$

$$B^{(1)}(0, 2) \quad \begin{array}{ccccc} \circ & \rightleftharpoons & \circ & \rightleftharpoons & \circ \\ \alpha & & \beta & & -2(\alpha+\beta) \end{array}$$

(vi)

$$R = (\pm\{\alpha, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta, \beta\} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm\{2\alpha, 2(\alpha+\beta)\} + 2\mathbb{Z}\delta)$$

$$A^{(2)}(0, 3) \quad \begin{array}{ccccc} \circ & \rightleftharpoons & \circ & \rightleftharpoons & \circ \\ \alpha & & \beta & & -2(\alpha+\beta)+\delta \end{array}$$

(1)

No.

⑧

$$R = (\pm\{\alpha, \alpha+\beta\} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm\{2\alpha, 2\alpha+\beta, 2(\alpha+\beta), \beta\} + 2\mathbb{Z}\delta)$$

$$C^{(2)}(3) \quad \textcircled{11} \Leftarrow \textcircled{0} \Rightarrow \textcircled{11}$$

(K)

$$\alpha \quad \beta \quad -(\alpha+\beta)+\delta$$

$$R = (\pm\{\alpha, \alpha+\beta\} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm\{2\alpha+\beta, \beta\} + 2\mathbb{Z}\delta) \\ \cup (\pm\{2\alpha, 2(\alpha+\beta)\} + 4\mathbb{Z}\delta)$$

$$A^{(4)}(0,4) \quad \textcircled{11} \Leftarrow \textcircled{0} \Rightarrow \textcircled{0}$$

(H)

$$\alpha \quad \beta \quad -(\alpha+\beta)+\delta$$

$$R = (\pm\{\alpha, \alpha+\beta\} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm\{2\alpha+\beta, \beta\} + 2\mathbb{Z}\delta) \\ \cup (\pm\{2\alpha, 2(\alpha+\beta)\} + (4\mathbb{Z}+2)\delta)$$

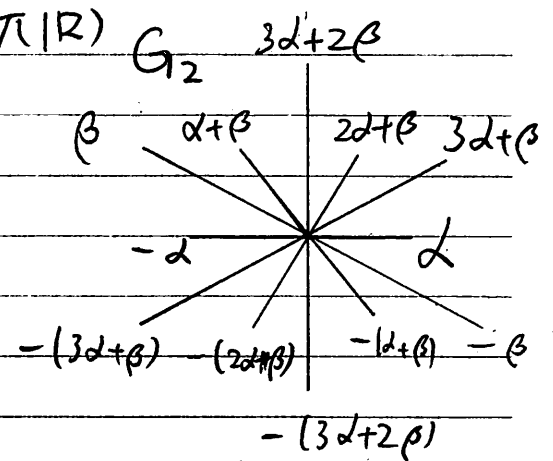
$$A^{(4)}(0,4) \quad \textcircled{0} \Leftarrow \textcircled{0} \Rightarrow \textcircled{11}$$

$$\alpha \quad \beta \quad -(\alpha+\beta)+\delta$$

(15) $(\beta, \beta) = 3(\alpha, \alpha)$ のとき $\pi(R)$

(2)

$$R = (\pm\{\alpha, 3\alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta, \alpha+\beta, \beta\} + \mathbb{Z}\delta)$$

 G_2 

$$G_2^{(1)} \quad \textcircled{0} \Leftarrow \textcircled{0} \Rightarrow \textcircled{0}$$

$$\alpha \quad \beta \quad -(3\alpha+2\beta)+\delta$$

(1)

$$R = (\pm\{\alpha, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta\} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\pm\{3\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta, \beta\} + 3\mathbb{Z}\delta)$$

 $D_4^{(3)}$

$$\textcircled{0} \text{---} \textcircled{0} \Leftarrow \textcircled{0} \Rightarrow \textcircled{0}$$

$$-(2\alpha+\beta)+\delta \quad \alpha \quad \beta$$

命題 $n=1$ とする。 δ を $(\mathbb{Z}R)^0$ とするものとする。

$\pi \in \delta$ は、 (α, α) を $\pi(\pi)$ が $\pi(R)$ の基本系とするものとする。 $R \equiv \mathbb{Z}\pi \cap \pi^{-1}(\pi(R))$ とおく。

(このとき R は単純ルート系である。)

$$R_{sh} \equiv \{\alpha \in R \mid \forall \beta \in R, (\alpha, \alpha) \leq (\beta, \beta)\}$$

$$R_{ex} \equiv \{\alpha \in R \mid \forall \alpha \in R_{sh} \quad (\alpha, \alpha) = 4(\alpha, \alpha)\}$$

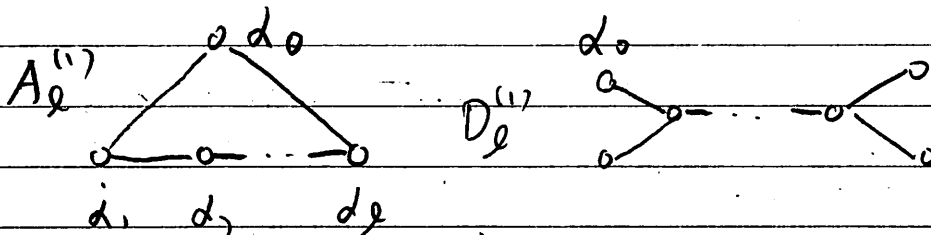
$$R_{reg} \equiv R - (R_{sh} \cup R_{ex})$$

とおく。このとき R は次の (I) ~ (I) の

どれかである。

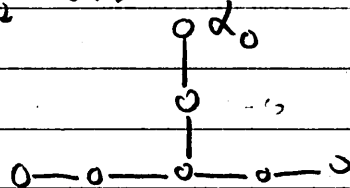
(I) $\pi(R)$ が A_l, D_l または E_6, E_7, E_8 の

$$\text{と等。 } R = R + \mathbb{Z}\delta = R_{sh} + \mathbb{Z}\delta$$

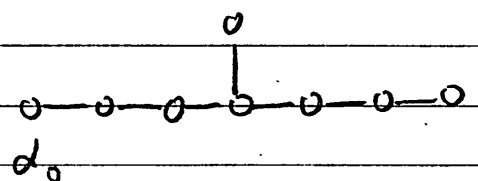


($l \geq 3$) $A_l^{(1)} \iff (l=1)$

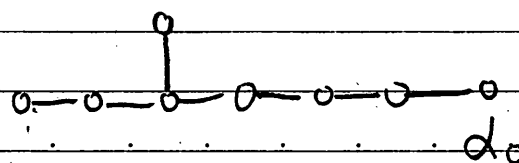
$E_6^{(1)}$



$E_7^{(1)}$



$E_8^{(1)}$



(イ) $\pi(R)$ が B_l , C_l または F_4 のとき

$$R = \dot{R} + \mathbb{Z}\delta \quad \begin{array}{l} B_l^{(1)} \quad 0 \leftarrow 0 \cdots \overset{\alpha_0}{\underset{\alpha_0}{0}} \quad (l \geq 3) \\ C_l^{(1)} \quad 0 \Rightarrow 0 \cdots \overset{\alpha_0}{\underset{\alpha_0}{0}} \leftarrow 0 \quad (l \geq 2) \end{array}$$

または $F_4^{(1)} \quad 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \overset{\alpha_0}{\underset{\alpha_0}{0}}$

$$R = (\dot{R}_{sh} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{lg} + 2\mathbb{Z}\delta)$$

$$D_{l+1}^{(2)} \quad 0 \leftarrow 0 \cdots \overset{\alpha_0}{\underset{\alpha_0}{0}} \Rightarrow 0$$

$$A_{2l-1}^{(2)} \quad 0 \leftarrow \overset{\alpha_0}{\underset{\alpha_0}{0}} \cdots \leftarrow 0 \leftarrow 0$$

$$E_6^{(2)} \quad \overset{\alpha_0}{\underset{\alpha_0}{0}} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0$$

(ウ) $\pi(R)$ が G_2 のとき

$$R = \dot{R} + \mathbb{Z}\delta \quad G_2^{(1)} \quad 0 \leftarrow 0 \leftarrow \overset{\alpha_0}{\underset{\alpha_0}{0}}$$

または

$$R = (\dot{R}_{sh} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{lg} + 3\mathbb{Z}\delta)$$

$$D_4^{(3)} \quad 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \overset{\alpha_0}{\underset{\alpha_0}{0}}$$

(I) $\pi(R)$ が BC_l のとき

$$R = (\dot{R} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{ex} + (2\mathbb{Z} + 1)\delta)$$

$$A_{2l}^{(2)}, \quad \alpha \leq 0 \cdots \cdots 0 \leq 0 \quad (l \geq 2) \quad A_2^{(1)} \quad 0 \leq 0 \quad (l=1)$$

α_0

$$R = (\dot{R} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{ex} + \mathbb{Z}\delta)$$

$$B^{(1)}(0, l) \quad \alpha \leq 0 \cdots \cdots 0 \leq 0 \quad (l \geq 2) \quad B^{(1)}(0, 1) \quad \alpha \leq 0 \quad (l=1)$$

α_0

$$R = (\dot{R} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{ex} + 2\mathbb{Z}\delta)$$

$$A^{(2)}(0, 3) \quad 0 \Rightarrow \alpha \leq 0 \quad (l=2)$$

α_0

$$A^{(2)}(0, 2l-1) \quad \alpha \leq 0 \cdots \cdots \overset{\alpha_0}{\underset{\alpha_0}{0}} \quad (l \geq 3)$$

$$R = (\dot{R}_{sh} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{lg} + 2\mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{ex} + 2\mathbb{Z}\delta)$$

$$C^{(2)}(l+1) \quad \alpha \leq 0 \cdots \cdots 0 \Rightarrow \alpha \quad (l \geq 2) \quad \alpha \Leftrightarrow \alpha \quad (l=1)$$

α_0

$$R = (\dot{R}_{sh} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{lg} + 2\mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{ex} + 4\mathbb{Z}\delta)$$

$$A^{(4)}(0, 2l) \quad \alpha \leq 0 \cdots \cdots 0 \Rightarrow 0 \quad (l \geq 2) \quad \alpha \Leftrightarrow 0 \quad (l=1)$$

α_0

または

$$R = (\dot{R}_{sh} + \mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{lg} + 2\mathbb{Z}\delta) \cup (\dot{R}_{ex} + (4\mathbb{Z} + 2)\delta)$$

$$A^{(4)}(0, 2l) \quad 0 \leq 0 \cdots \cdots 0 \Rightarrow \alpha \quad 0 \Leftrightarrow \alpha \quad (l \geq 2)$$

α_0

命題 (上の命題のつづき)

$\dot{\Theta}_{sh} \in \dot{R}_{sh}$, $\dot{\Theta}_{lg} \in \dot{R}_{lg}$, $\dot{\Theta}_{ex} \in \dot{R}_{ex}$ をそれぞれ

$$\dot{R}_{sh} \subset \dot{\Theta}_{sh} - \mathbb{Z}_{\geq 0} \pi, \quad \dot{R}_{lg} \subset \dot{\Theta}_{lg} - \mathbb{Z}_{\geq 0} \pi, \quad \dot{R}_{ex} \subset \dot{\Theta}_{ex} - \mathbb{Z}_{\geq 0} \pi$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^l m_i d_i \mid m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

と定めるものとする。

$$d_0 := \begin{cases} S - \dot{\Theta}_{lg} \left(A_{\ell}^{(1)}, B_{\ell}^{(1)}, C_{\ell}^{(1)}, D_{\ell}^{(1)}, E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}, \right. \\ \quad \left. F_4^{(1)}, G_2^{(1)}, A^{(2)}(0, 2\ell-1) \text{ のとき} \right) \\ \\ S - \dot{\Theta}_{sh} \left(D_{\ell+1}^{(2)}, A_{2\ell-1}^{(2)}, E_6^{(2)}, D_4^{(3)}, C^{(2)}(\ell+1), \right. \\ \quad \left. A^{(4)}(0, 2\ell) \text{ のとき} \right) \\ \\ S - \dot{\Theta}_{ex} \left(A_{2\ell}^{(2)}, B^{(1)}(0, \ell) \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

とおく。このとき $\pi := \{d_0\} \cup \pi$ は R の基本系である。特にアフレルト系には基本系が存在する。

命題 (上の命題のつづき)

B を R の基本系からなる集合族とする。

写像 $f: B \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\pi' = \{d'_0, d'_1, \dots, d'_l\} \in B$

に対して $f = \sum_{i=0}^l n_i d'_i$ ($n_i \in \mathbb{Z}$) としたとき

$$f(\pi') := \sum_{i=0}^l n_i$$

によって定義する。このとき

$$f(B) = \{f(\pi), -f(\pi)\} \cup \{0\}$$

" $f(-\pi)$

であって

$$\begin{aligned} \square f(\pi') = f(\pi) &\iff \exists_{\substack{w \in W \\ \text{Weyl 群}}} \pi' = w(\pi) \quad \square \\ &\quad \langle s_{d_i} \mid d_i \in \pi \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ。特に R のディレキレ $\square$ 形は

基本系の取り方によらずに唯一つ定まる。

1.1.1 $2R \cap R \neq \emptyset$ を仮定する。

No.

14

3 ヤーレルの定理

$n \in \{0, 1\}$ とし $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ を R の基本系
 $|I| = l + n$

とする。 $\mathfrak{g}$ を $\{H_i, E_i, F_i \mid i \in I\}$ を

生成系とし以下の関係式によって定義す

れる①上の Lie 代数とする。 $a_{ij} := \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} (i \neq j)$

$$(S1) \quad [H_i, H_j] = 0$$

とおく。

$$(S2) \quad [H_i, E_j] = (\alpha_i, \alpha_j) E_j$$

$$(S3) \quad [H_i, F_j] = -(\alpha_i, \alpha_j) F_j$$

$$(S4) \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \times \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} H_i$$

$$(S5) \quad (\text{ad } E_i)^{1-a_{ij}} (E_j) = 0$$

$$(S6) \quad (\text{ad } F_i)^{1-a_{ji}} (F_j) = 0$$

$\lambda \in \mathbb{Z}R$ に対して $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{g}_\lambda$ を

$$H_i \in \mathfrak{g}_0, E_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}, F_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$$

$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ によって定義する。

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}R} \mathfrak{g}_\lambda \text{ が成り立つ。}$$

$$R^{\pm} := (\pm R) \cap \mathbb{Z}_{\geq 0} \pi \text{ とおく.}$$

No. _____

15

$$f := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} H_i \subset \mathfrak{g}_0 \text{ とおく.}$$

補題 $f = \mathfrak{g}_0$.

補題 $\mathfrak{g} = f \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in (\mathbb{Z}_{\geq 0} \pi \cup \mathbb{Z}_{\leq 0} \pi) \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{\lambda} \right)$

$$n^{\pm} := \bigoplus_{\lambda \in \pm \mathbb{Z}_{\geq 0} \pi \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{\lambda} \quad \text{とおくと } \mathfrak{g} = n^{+} \oplus f \oplus n^{-}$$

三角分解

が成り立ち n^{+} は $\{E_i\}$ で生成され (S5) を

関係式とするリー代数であり n^{-} は $\{F_i\}$ で

生成され (S6) を関係式とするリー代数で

ある。

定理 $n=0$ とする。このとき $\mathfrak{g}$ は有限次元

単純リー環であり

$$\mathfrak{g} = f \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha} \right)$$

$$\dim \mathfrak{g}_{\alpha} = 1 \quad (\alpha \in \mathfrak{g}_{\alpha})$$

$$\dim f = l$$

が成り立つ。

§4 $n=2, l=1$ の場合について

この節では $n=2, l=1$ を仮定する。

$\delta \in \mathbb{Z}R$ を $(\mathbb{Z}R)^0 = \mathbb{Z}\delta$ とするものとする。

$\alpha, \beta \in R$ を $\{\pi(\alpha), \pi(\beta)\}$ が $\pi(R)$ の基本系
と取りものとする。 $(\alpha, \alpha) \leq (\beta, \beta)$ と仮定する。

$$\alpha^* := \begin{cases} -\alpha - \delta & (A_2^{(1)}, C_2^{(1)}, G_2^{(1)}, D_3^{(2)}, D_4^{(3)}) \\ -2\alpha - \delta & (A_4^{(2)}) \end{cases}$$

$$\beta^* := \begin{cases} -\beta - \delta & (A_2^{(1)}, C_2^{(1)}, G_2^{(1)}, A_4^{(2)}) \\ -\beta - 2\delta & (D_3^{(2)}) \\ -\beta - 3\delta & (D_4^{(3)}) \end{cases}$$

$$B := \{\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*\} \quad \text{とおく。}$$

α を

$$H_\alpha (\alpha \in \mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta \oplus \mathbb{R}\delta)$$

$$E_\gamma (\gamma \in \mathbb{B} \cup -\mathbb{B})$$

(E0)-(E11)

を生成系とし以下の関係式で定義される

$\mathbb{C}$ 上のリー代数とする。

$$(E0) \quad H_{x\alpha+y\tau} = xH_\alpha + yH_\tau \quad \left(\begin{array}{l} x, y \in \mathbb{R} \\ \alpha, \tau \in \mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta \oplus \mathbb{R}\delta \end{array} \right)$$

$$(E1) \quad [H_\alpha, H_\tau] = 0$$

$$(E2) \quad [H_\alpha, E_\gamma] = (\alpha, \gamma) E_\gamma$$

$$(E3) \quad [E_\gamma, E_{-\gamma}] = H_{\gamma^\vee}$$

$$(E4) \quad [E_\lambda, E_\mu] = 0 \quad (\lambda \neq \mu, (\lambda, \mu) \leq 0)$$

$$(E5) \quad (\text{ad } E_\lambda)^{1-(\lambda^\vee, \mu)} E_\mu = 0 \quad (\lambda \neq \mu, (\lambda, \mu) < 0)$$

$$(E6) \quad [E_{\pm\alpha^*}, E_{\pm\beta}] = [E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta^*}]$$

$$(A_2^{(1)}, C_2^{(1)}, G_2^{(1)})$$

$$(E7) \quad [E_{\pm\alpha^*}, [E_{\pm\alpha^*}, E_{\pm\beta}]]$$

$$= [E_{\pm\alpha}, [E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta^*}]] \quad (D_3^{(2)})$$

$$\begin{aligned}
 (E8) \quad & [E_{\pm\alpha^*}, [E_{\pm\alpha^*}, [E_{\pm\alpha^*}, E_{\pm\beta}]]] \\
 &= [E_{\pm\alpha}, [E_{\pm\alpha}, [E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta^*}]]] \\
 & \quad (D_4^{(3)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E9) \quad & \pm 2 [E_{\pm\alpha^*}, E_{\pm\beta}] = [E_{\pm\alpha}, [E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta^*}]] \\
 & \quad (A_4^{(2)})
 \end{aligned}$$

$$(E10) \quad [E_{\pm\alpha}, [E_{\pm\alpha^*}, E_{\pm\beta}]] = 0 \quad (D_3^{(2)})$$

$$\begin{aligned}
 (E11) \quad & [E_{\pm\alpha}, [E_{\pm\alpha}, [E_{\pm\alpha^*}, E_{\pm\beta}]]] \\
 &= [E_{\pm\alpha}, [E_{\pm\alpha^*}, [E_{\pm\alpha^*}, E_{\pm\beta}]]] = 0 \\
 & \quad (D_4^{(3)})
 \end{aligned}$$

$$n_\lambda := \exp(\operatorname{ad} E_\lambda) \exp(\operatorname{ad}(-E_{-\lambda})) \exp(\operatorname{ad} E_\lambda) \\ \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$$

(C1) No. (C8)

19

命題 ($l=2, n=1$ とする。) 次の条件をみたす

同型写像 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が一意に存在する。

$$(C1) \quad \begin{aligned} f(H_1) &= H_\alpha, \quad f(H_2) = H_\beta \quad (:= \tau) \\ f(H_0) &= H_\delta - p H_\alpha - q H_\beta \quad (\pi H_0 = -p\alpha - q\beta) \end{aligned}$$

$$(C2) \quad \begin{aligned} f(E_1) &= E_\alpha, \quad f(E_2) = E_\beta \\ f(F_1) &= E_{-\alpha}, \quad f(E_2) = E_{-\beta} \end{aligned}$$

$$(C3) \quad (A_2^{(1)}) \quad \begin{aligned} & \parallel n_\alpha(E_{-\beta^*}) & n_\alpha(E_{\beta^*}) \\ & & \parallel \\ f(E_0) &= -[E_{-\alpha}, E_{-\beta^*}], \quad f(F_0) = [E_\alpha, E_{\beta^*}] \end{aligned}$$

$$(C4) \quad (C_2^{(1)}) \quad \begin{aligned} & \parallel n_\alpha(E_{-\beta^*}) & n_\alpha(E_{\beta^*}) \\ & & \parallel \\ f(E_0) &= \frac{1}{2} [E_{-\alpha}, [E_{-\alpha}, E_{-\beta^*}]], \quad f(F_0) = \frac{1}{2} [E_\alpha, [E_\alpha, E_{\beta^*}]] \end{aligned}$$

$$(C5) \quad (G_2^{(1)})$$

$$f(E_0) = -\frac{1}{6} [[E_{-\beta}, E_{-\alpha}], [E_{-\beta}, E_{-\alpha}], E_{-\alpha^*}] = n_\beta n_\alpha(E_{-\beta^*})$$

$$f(F_0) = \frac{1}{6} [[E_\beta, E_\alpha], [E_\beta, E_\alpha], E_{\alpha^*}] = n_\beta n_\alpha(E_{\beta^*})$$

$$(C6) \quad (D_3^{(2)})$$

$$\begin{aligned} & \parallel n_\beta(E_{-\alpha^*}) & n_\beta(E_\alpha) \\ & & \parallel \end{aligned}$$

$$f(E_0) = -[E_{-\beta}, E_{-\alpha^*}], \quad f(F_0) = [E_\beta, E_{\alpha^*}]$$

(C7) $(D_4^{(3)})$

$$\eta_\alpha \eta_\beta (E_{-\alpha^*})$$

$$\eta_\alpha \eta_\beta (E_{\alpha^*})$$

$$f(E_0) = [[E_{-\alpha}, E_{-\beta}], E_{-\alpha^*}], f(F_0) = [[E_\alpha, E_\beta], E_{\alpha^*}]$$

(C8)

$$\eta_\beta (E_{-\alpha^*})$$

$$\eta_\beta (E_{\alpha^*})$$

$$f(E_0) = \frac{1}{2} [E_{-\beta}, [E_{-\beta}, E_{-\alpha^*}]], f(F_0) = \frac{1}{2} [E_\beta, [E_\beta, E_{\alpha^*}]]$$

15 3ファイバー代数のドリンフェルト関係式

定理 $n=1$ とする。 $\delta \in \mathbb{Z}R$ を $\mathbb{Z}\delta = (\mathbb{Z}R)^\circ$

となるものとする $\pi \subset R$ を $\pi(\pi)$ が $\pi(R)$ の

基本系となるものとする。 $\alpha \in \pi$ に対して

$$\alpha^* = c\alpha - p\delta \in R \text{ を } \{\alpha, -\alpha^*\} \text{ が } \beta \text{ 階数 } 1$$

$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ 1, 2 & 1 \end{matrix}$

の 3ファイバース系の基本系となるものとする。

$$\Omega \text{ を } H_\alpha (\alpha \in \mathbb{R}\delta \oplus \mathbb{R}\pi), E_{\pm\beta} (\beta \in \{\alpha, \alpha^*\} \in \pi)$$

を生成系とし $(E_0) \sim (E_1)$ と同様の関係式

で定義したものとする。ただし $(\alpha, \beta) = 0$ のときは

$$[E_{-\alpha}, E_{-\beta}] = 0 \text{ とする。このときリー代数の}$$

同型写像 $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ が存在する。

証明のアイデア 各 $\alpha \in \Pi$ に対して適当

な階数が1のアズレリ-代数

$$\mathfrak{g}^{(\alpha)} = \langle E_0, F_0, E_1, F_1, H_0, H_1 \rangle$$

と準同型写像 $k^{(\alpha)}: \mathfrak{g}^{(\alpha)} \rightarrow \mathfrak{g}$

$$\text{で } k^{(\alpha)}(H_0) = H_{-\alpha}, k^{(\alpha)}(H_1) = H_{\alpha}$$

$$k^{(\alpha)}(E_1) = E_{\alpha}, k^{(\alpha)}(F_1) = E_{-\alpha}$$

$$k^{(\alpha)}(E_0) = E_{-\alpha}, k^{(\alpha)}(F_0) = F_{-\alpha}$$

となるものがある (明らか)

$$N^{\pm} := \langle k^{(\alpha)}(\mathfrak{g}_{\pm\alpha + p\delta}^{(\alpha)}) \mid \alpha \in \Pi, u \in \{1, 2\}, p \in \mathbb{Z} \rangle$$

$$L := \langle k^{(\alpha)}(\mathfrak{g}_{p\delta}^{(\alpha)}) \mid \alpha \in \Pi, p \in \mathbb{Z} \rangle$$

$$= \mathfrak{g} + \sum_{\substack{\alpha \in \Pi \\ p \in \mathbb{Z}}} k^{(\alpha)}(\mathfrak{g}_{p\delta}^{(\alpha)}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ほとんど} \\ \text{可換} \end{array} \right)$$

とあくと

$$\mathfrak{g} = N^+ + L + N^-$$

であることが 上の命題より 証明出来る。

適当なリー代数 D と準同型写像

$$\tau: \mathfrak{g} \rightarrow D$$

$$\tau\left(\sum_{\alpha \in \pi} k^{(\alpha)}(\mathfrak{g}^{(\alpha)})\right) = \tau(f) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in \pi \\ \lambda \neq 0}} (\tau \circ k^{(\alpha)})(\mathfrak{g}_{\lambda}^{(\alpha)})\right)$$

$$\text{かつ } \dim \tau(f) = l+1,$$

$$\dim (\tau \circ k^{(\alpha)})(\mathfrak{g}_{\lambda}^{(\alpha)}) = \dim \mathfrak{g}_{\lambda}^{(\alpha)}$$

と仮定しているものがケースバイケースでとれる。

これより $A_{\text{ut}}(\mathfrak{g})$ の部分群 $\langle \alpha \mid \alpha \in R \rangle$ をもちいて

$$(*) \quad \mathfrak{g} = f \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha}\right) \oplus \left(\bigoplus_{P \neq 0} \mathfrak{g}_{Pd}\right)$$

$$\text{かつ } \dim f = 1, \dim \mathfrak{g}_{\alpha} = 1, \dim \mathfrak{g}_{Pd} = \dim \mathfrak{g}_{Pd}$$

が証明出来る。 ($\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{He}$ の

普遍中心拡大であり事実は用いなく

てよい。)

(*) について

上述の $\tau: \Omega \rightarrow D$ を用いて

$$\Omega = N^- \oplus L \oplus N^+$$

$$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$$

$$\begin{array}{ccc} \oplus \Omega_{\lambda+p\delta} & \oplus \Omega_{p\delta} & \oplus \Omega_{-\lambda+p\delta} \\ u > 0 & p \in \mathbb{Z} & u < 0 \\ p \in \mathbb{Z} & & p \in \mathbb{Z} \\ \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \pi \setminus \{0\} & & \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \pi \setminus \{0\} \end{array}$$

$$\dim \Omega_{\lambda+p\delta} = \dim \mathcal{J}_{\lambda+p\delta} \quad (\lambda \in \pi)$$

$$\dim \Omega_{p\delta} = \dim \mathcal{J}_{p\delta}$$

がわかる。例えば $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \pi \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \pi} \mathbb{Z}\alpha \right) - (*)$

のとき $p \in \mathbb{Z}^+$ に対して $\lambda' := \lambda + p\delta$ とおくと

$(\lambda', \lambda') > 0$ であるので ある $\alpha \in \pi$ で $(\lambda', \alpha) > 0$

となるものがある。 $\lambda'' := s_{\alpha}(\lambda') = s_{\alpha}(\lambda) + p\delta$

とおくと $s_{\alpha}(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha)\alpha$ より 仮定 (*) より

$\lambda - s_{\alpha}(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \pi \setminus \{0\}$ である。

そして

$$\dim \sigma_\lambda = \dim \mathcal{M}_2(\sigma_\lambda) = \dim \sigma_{s_2(\lambda)}$$

であるので

$$\text{ht}'\left(\sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha + \rho\right) := \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha$$

に關して帰納法より $\sigma \cong \sigma'$ である事

がわかる。(全射準同型写像 $\tau: \sigma \rightarrow \sigma'$
が存在する事を示すのは簡単。)

□

§6 楕円リー代数

$m=2$ とする。すなわち $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}R)^0 = 2$

であり R は楕円ルート系である。

$a, b \in \mathbb{Z}R$ を $(\mathbb{Z}R)^0 = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$ とするもの

とする。 $\pi' : V \rightarrow V/Ra$ を自然な射影

とする。このとき $(\pi'(R), V/Ra)$ はアフィン

ルート系である。 $\pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ を

$\pi'(\pi)$ が $\pi'(R)$ の基本系とするものとし

る。 $j \in \mathbb{N}/\pi$ を $\mathbb{Z}j = \mathbb{Z}\pi \cap V^0$ と

するものとする。このとき $(\mathbb{Z}R)^0 = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}j$

である。

以下 $\ell \geq 2$ と仮定し ϕ を (E0)~(E11)

と同様の関係式で定義したものとする。

ϕ を楕円リー代数と呼ぶ。

定理 [Y, AYY] ($n=2, l \geq 2$ とする)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in R} \mathfrak{g}_{\lambda} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{x, y \in \mathbb{Z} \\ (x, y) \neq (0, 0)}} \mathfrak{g}_{x\delta + y\alpha} \right)$$

$$\dim \mathfrak{f} = l + 2$$

$$\dim \mathfrak{g}_{\lambda} = 1 \quad (\lambda \in R)$$

$\dim \mathfrak{g}_{x\delta + y\alpha}$ もケースバイケースで
求めた。(a を適当に取り替える
議論が出来る。)

文献

Saeid Azam, Hiroyuki Yamane, Malihe Yosofzadeh,
Exposition on affine and elliptic root systems
and elliptic Lie algebras
to appear in RIMS Kokyuroku
Bessatsu.

私のホームページも見て下さい。