

対偶 (contraposition) についての注意

命題の真偽が、その対偶の真偽に一致することが説明しにくい例

$$x < 0 \text{ かつ } y > 0 \implies xy < 0 \quad (1)$$

は明らかに真の命題である。では、その対偶

$$xy \geq 0 \implies x \geq 0 \text{ または } y \leq 0 \quad (2)$$

は真か？ この疑問に答えることがこのメモの目的である。もちろん命題の真偽は、その対偶の真偽に一致するはずだから、答は真となるはずである。さて、これが真だと簡単にわかりますか？

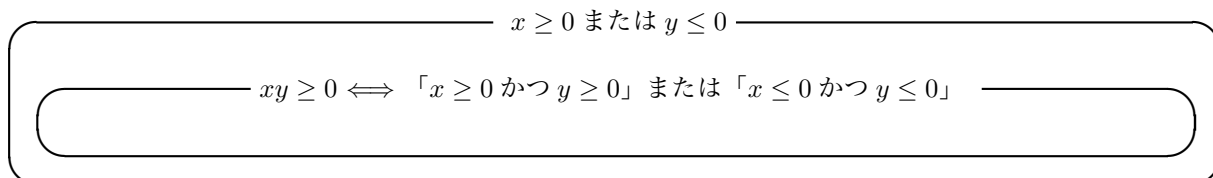
学生に対してどのように説明すればよいだろう？

「方法1」

$$xy \geq 0 \implies 「x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0」 \text{ または } 「x \leq 0 \text{ かつ } y \leq 0」 \quad (3)$$

が真であることをまず納得させる。(さらに、この命題の逆も成立することも確認するとよい。) 次に、(2)の結論は(3)の結論の1部であることを納得させる。従って、(2)は最後まできちっと現象を述べていないが、間違ったことは言っていない。だから真である。

さらに、集合のベン図を使って、(2)の結論は(3)の結論を**包含する**ことを図示するのもよいだろう。(2の方が(3)より緩い主張である。) また、命題(3)の逆も真なので、命題(3)の結論は仮定の言い換えであると説明してもよい。



「方法2」 数学ではしばしば、 p または q であることを証明するのに、 p でないならば q であることを証明する。これをまず納得させる。たとえば、 p または q であることは、 p である必要はなく、 p か q のどちらかが成り立っていればよいということになる。従って、 p でないならば q でなければならない、というふうに説明する。

さて、命題(2)において、 $x \geq 0$ の否定は $x < 0$ である。よって、 $xy \geq 0$ となるためには $y \leq 0$ でなければならない、と説明する。

「補足」 今後、 p または q という表現に気をつけよう。極端な例だが、「3は負の数または正の数である」というのも真の命題である。(p または q は、 p でなくてもよいのである。)

ついでに、 $(x-1)(x-2)=0$ の解は $x=1, 2$ だが、命題の形で書けば、
 $(x-1)(x-2)=0$ ならば $x=1$ または $x=2$ となる。(且つではない!)

因みに、 $(x-1)(x-2)=0$ ならば $x=1$ または $x=2$ または $x=100$ はどうだろう。これは方程式を解けという問題では間違えだが、命題としては真である。(方程式を解けとは、可能な解をすべて求めよ、と解釈するのが普通である。)

問1 $x \geq 2 \implies x^2 \geq 4$ の対偶を述べ、それが真であることを説明せよ。

問2 $x > 0 \text{ かつ } y \geq 0 \implies x+y > 0$ の対偶を述べ、それが真であることを説明せよ。

問3 $x=0 \text{ かつ } y=1 \implies x+y=1$ の対偶を述べ、それが真であることを説明せよ。

問4 $x \neq 0 \text{ または } y \neq 1 \implies x^2 + (y-1)^2 > 0$ の対偶を述べ、それが真であることを説明せよ。

(どれも上記例より簡単ですね。もっと難しい例はないでしょうか。。。)