定数係数斉次2階線形微分方程式の解法

井川治

2009年10月23日　改訂

a, b を定数として y に関する

$$y'' + ay' + by = 0$$

という形の微分方程式を定数係数斉次2階線形微分方程式という．この微分方程式の一般解について考える．

補題 1. y を x の関数とする．このとき，
(1) $(y^2)' = 2yy'$
(2) $\{(y')^2\}' = 2y'y''$

証明　(1) 積の微分法より

$$(y^2)' = (yy)' = y'y + yy' = 2yy'.$$

(2) (1) の y を y' で置き換えると

$$\{(y')^2\}' = 2y'(y')' = 2y'y''.$$

注意 2. 上の補題は合成関数の微分法を用いて証明することもできる．

補題 3. a を定数とする．微分方程式 $y' = ay$ の一般解は $y = Ce^{ax}$ となる (C は定数)．

証明　関数 y が上の微分方程式を満たしたとすると積の微分法より

$$(e^{-ax}y)' = e^{-ax}(y' - ay) = 0$$

ゆえに $e^{-ax}y = C$ となり $y = Ce^{ax}$.

問題 4. 微分方程式 $y'' = 0$ の一般解は $y = Ax + B$ (A, B は定数) となることを示せ.

命題 5. $\omega \neq 0$ を定数とする．微分方程式

$$y'' = -\omega^2 y \tag{1}$$

の一般解は $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x \quad (A, B$ は定数) である．

証明 (1) の両辺に $2y'/\omega^2$ をかけて移項すると

$$\frac{2y'y''}{\omega^2} + 2yy' = 0.$$

補題 1 を用いて変形すると

$$\frac{1}{\omega^2}\{(y')^2\}' + (y^2)' = 0.$$

よって

$$\left\{\frac{1}{\omega^2}(y')^2 + y^2\right\}' = 0$$

ゆえに

$$0 \leq y^2 + \left(\frac{y'}{\omega}\right)^2 = \text{定数} = R^2.$$

$R = 0$ ならば $y = 0$ である．以下，$R \neq 0$ とする．x の関数 $\theta(x)$ で

$$y = R\sin\theta(x), \quad \frac{y'}{\omega} = R\cos\theta(x)$$

となるものが存在する．第一式の両辺を微分すると $y' = R\theta'\cos\theta$. 他方，第二式より $y' = R\omega\cos\theta$. ゆえに $\omega'\cos\theta = \theta\cos\theta$. 一方，$y' = \omega R\cos\theta$ より $y'' = -\omega R\theta'\sin\theta$. $y'' = -\omega^2 y$ より $\omega'\sin\theta = \theta\sin\theta$. $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は同時に 0 とはならないから $\theta' = \omega$. よって $\theta = \omega x + C$. したがって

$$\begin{aligned} y &= R\sin(\omega x + C) = R\cos C\sin\omega x + R\sin C\cos\omega x \quad (\text{加法定理}) \\ &= A\cos\omega x + B\sin\omega x \quad (A = R\sin C,\ B = R\cos C) \end{aligned}$$

注意 6. 証明中で示したように (1) の一般解は

$$y = R\sin(\omega x + C) \quad (R, C \text{ は定数})$$

と書くこともできる.

命題 7. $\omega \neq 0$ を定数とする．微分方程式 $y'' = \omega^2 y$ の一般解は

$$y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} \quad (A, B\text{ は定数})$$

となる．

証明　x の関数 $u(x), v(x)$ を

$$u(x) = y + \frac{1}{\omega}y', \quad v(x) = y - \frac{1}{\omega}y'$$

と定めると

$$u' = y' + \frac{1}{\omega}y'' = y' + \omega y = \omega\left(y + \frac{1}{\omega}y'\right) = \omega u,$$
$$v' = y' - \frac{1}{\omega}y'' = y' - \omega y = -\omega\left(y - \frac{1}{\omega}y'\right) = -\omega v$$

補題 3 より

$$u = C_1 e^{\omega x}, \quad v = C_2 e^{-\omega x}.$$

u, v の定め方より

$$y = \frac{1}{2}(u+v) = \frac{C_1}{2}e^{\omega x} + \frac{C_2}{2}e^{-\omega x} = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}.$$

定義 8. 定数係数斉次 2 階線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b\text{ は定数}) \tag{2}$$

に対して λ に対する 2 次方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

を (2) の**特性方程式**と言う．

定理 9. 定数係数斉次 2 階線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b\text{ は定数})$$

の一般解は特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解に対応して次の式で与えられる．但し，C_1, C_2 は任意定数とする．

(i) 異なる二つの実数解 α, β を持つとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}.$$

(ii) 2 重解 α を持つとき

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\alpha x}.$$

(iii) 異なる二つの虚数解 $p \pm qi$ (p, q は実数) を持つとき

$$y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx).$$

証明　k を定数として

$$y = e^{kx}u(x)$$

とおき未知関数を y から $u(x)$ へ変換する．このとき，

$$\begin{aligned} y' &= e^{kx}u' + ke^{kx}u, \\ y'' &= e^{kx}u'' + 2ke^{kx}u' + k^2e^{kx}u \end{aligned}$$

これらを元の微分方程式へ代入し e^{kx} で両辺を割ると

$$(u'' + 2ku' + k^2u) + a(u' + ku) + bu = 0.$$

整理して

$$u'' + (2k + a)u' + (k^2 + ak + b)u = 0.$$

u' の係数が 0 になるように $k = -a/2$ とおく．
　つまり，$y = e^{-\frac{a}{2}x}u(x)$ とおくと

$$u'' - \frac{a^2 - 4b}{4}u = 0.$$

(i) $a^2 - 4b > 0$ のとき

$$u'' = \left(\frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)^2 u$$

命題 5 より

$$u = C_1 e^{\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}x}$$

よって

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}x} \\ &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}. \end{aligned}$$

(ii) $a^2 - 4b = 0$ のとき問題 4 より $u = C_1 + C_2 x$. よって

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}(C_1 + C_2 x) = (C_1 + C_2 x)e^{\alpha x}$$

(iii) $a^2 - 4b < 0$ のとき

$$u'' + \left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}\right)^2 u = 0.$$

命題 7 より

$$\begin{aligned} u &= C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}x\right) \\ &= C_1 \cos qx + C_2 \sin qx. \end{aligned}$$

よって

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx) = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx).$$