March 23, 2012

固有関数の導入

秋田工業高等専門学校

自然科学系　吉井 洋二

本校では 2 年時に線形代数の初歩を教え、その続きは専攻科 1 年となる。専攻科にもなると、数学の知識、特に解析系は大学 2 年レベルに達している。このレベルの学生に線形代数を教える際、微分方程式やフーリエ変換を例に使うとよい。

たとえば、

- 1. 固有値の導入に微分方程式を使う。
- 2. 熱伝導の方程式を固有関数を用いて解く。
- 3. フーリエ変換の固有関数を求める。
- 4. フーリエ変換はユニタリー変換である。

固有関数

ベクトル空間を定義する際、その抽象的定義より、具体例が大事である（と多くの先生が感じる）と思う。その際、学生にとっては、数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ より、

$$V = \{f(t) \mid f(t) \text{ は何回でも微分可能 }\}$$

の方が以外と身近である。そして V の線形変換の例として、微分作用素

$$D := \frac{d}{dt}$$

を紹介するのもごく自然である。

さて、この D の固有値はなんだろう？

答はすべての実数である。実際、任意の実数 a に対して、

$$D(e^{at}) = ae^{at}$$

だからである。そして固有ベクトルは関数

$$f(t) = e^{at}$$

である。

V の元はベクトルと呼ぶより関数と呼んだ方がよいだろう。

では 2 階微分

$$D^2 := \frac{d^2}{dt^2}$$

の固有値、そして固有関数はなんだろう？
この場合も、

$$e^{at},\ e^{-at},\ \cos at,\ \sin at,\ 1,\ t$$

などが固有ベクトルになることが微分の経験からわかる。
実際、

$$\begin{aligned}
&D^2(e^{at}) = a^2 e^{at} \text{ だから固有値は } a^2,\\
&D^2(e^{-at}) = a^2 e^{-at} \text{ だから固有値は } a^2,\\
&D^2(\cos at) = -a^2 \cos at \text{ だから固有値は } -a^2,\\
&D^2(\sin at) = -a^2 \sin at \text{ だから固有値は } -a^2,\\
&D^2(1) = 0 \times 1 \text{ だから固有値は } 0,\\
&D^2(t) = 0 \times t \text{ だから固有値は } 0
\end{aligned}$$

である。(ここでもすべての実数が固有値になり得る。)

もちろん、D^2 のすべての固有関数を調べたかったら、よく知っている微分方程式

$$y'' - \lambda y = 0$$

を解けばよい。解空間は 2 次元ベクトル空間であり、その基底となる関数は、例えば

$$\begin{aligned} &\lambda > 0 \quad \text{ならば} \quad \{e^{\sqrt{\lambda}\,t},\ e^{-\sqrt{\lambda}\,t}\}, \\ &\lambda < 0 \quad \text{ならば} \quad \{\cos\sqrt{-\lambda}\,t,\ \sin\sqrt{-\lambda}\,t\}, \\ &\lambda = 0 \quad \text{ならば} \quad \{1,\ t\} \end{aligned}$$

である。

このように、例えば、微分方程式

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

を解くことは、線形変換 $D^2 - 2D$ の固有値 3 の固有空間を求めることに他ならない、ということを強調しておく。これは

微分方程式の復習と、線形変換、固有値、固有ベクトル等の新概念把握とで、一石二鳥である。

また、多項式関数全体がなす V の部分空間上での D の固有空間は何か？

（答）固有値は０しかなく、その固有空間は｛定数関数全体｝

等々を考えさせることは、固有値等の概念把握にとても有効である。

熱伝導の方程式

熱伝導の方程式と言えば、変数分離法で解くのが普通である。そこで使う、分数の形にして両辺を定数と置くテクニックには、違和感を感じる人が多いと思う。

ここでは、固有関数を用いて解く方法を紹介したい。

次のような熱伝導の方程式の初期値境界値問題（どんな教科書にも書いてある問題）を考えよう。

2 変数関数 $f(x,t)$ が微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = c\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{1}$$

を満たし（c は正の定数)、境界条件：

$$f(0,t) = f(1,t) = 0 \tag{2}$$

と初期条件：

$$f(x,0) = \varphi(x) \tag{3}$$

を満たす関数 $\varphi(x)$ が与えられているとする。

物理的には、区間 $[0,1]$ の両端での温度を固定した長さ 1 の針金について、初期の熱分布 $\varphi(x)$ が与えられたときの、時刻 t での熱分布 $f(x,t)$ を調べる問題ということになる。

まず、$\dfrac{\partial}{\partial t}$ の固有関数として、e^{bt}（b は固有値）をとる。
次に、$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ の固有関数はいろいろあるが、境界条件 (2) を満たすものは、$\sin n\pi x$ （固有値は $-n^2\pi^2$）となる。
但し n は任意の整数である。
ここで、

$$b = -cn^2\pi^2$$

を満たせば、それぞれの固有関数を掛けた関数

$$e^{-cn^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

は $\{(1), (2)\}$ の解となる。

それぞれの変数の固有関数を、境界条件のない変数 t の方の固有値で調整してから掛ければ解となる！

あとは通常の教科書にある解法となるが、念のため書いておく。

n は任意の整数なので、実は解が無限に見つかったわけである。
そこで、微分方程式が線形であることから、これらの無限和

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, e^{-cn^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

も {(1), (2)} の解となる。
さらに、$f(x,t)$ が初期条件 (3)

$$\varphi(x) = f(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x$$

を満たすので、$\varphi(x)$ をフーリエ正弦級数展開することで定数 C_n を定めることができる。従って {(1), (2), (3)} の解を得る。