

平成 21 年 1 月 27 日

「二回部分積分して移項するパターン」の問題で積分定数 C をどこで加えるか？

$\int e^x \sin x dx$ 等を求める問題は、部分積分を 2 回行くと求めたい項が出てくるので、それを移項して求めるわけだが、最後に積分定数 C を理由も書かずに付け加える教科書等が多いようである。

[一般的な教科書の説明] : $\int e^x \sin x dx = I$ とおけば、

$$\begin{aligned} I &= \int (e^x)' \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - I \end{aligned}$$

よって I を移項して、 $2I = e^x(\sin x - \cos x)$ となり、 $I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$ を得る。従って、 $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$ となる。

ここで、 $\int e^x \sin x dx = I$ とおいたのに、いきなり C が付くのはおかしいのでは？と生徒に聞かれたらどうするのだろうか？

I を $e^x \sin x$ の 1 つの原始関数と考えれば、 $I + C$ も原始関数であり、 $\int e^x \sin x dx$ は全ての原始関数を表す記号だから、 $\int e^x \sin x dx = I + C$ である。これでいいだろうか？

確かに理屈は合っているが、今まで教えてきた等式の大切さを無視することにならないか？

たとえ I を $e^x \sin x$ の 1 つの原始関数と考えたにせよ、 $\int e^x \sin x dx = I$ とおくことで、上記の等式変形ができたのである。従って、 $\int e^x \sin x dx = I + C$ が成り立つなら、 $I = I + C$ となり、 $C = 0$ となってしまうのではないか？

このような質問が出ない説明を試みる。

まずはっきりさせなくてはいけないのは、 $\int e^x \sin x dx$ は $e^x \sin x$ の原始関数を I とおけば、 $\int e^x \sin x dx = I + C$ と書いているということ。さらに、 C は任意なので、式中に $\int e^x \sin x dx$ が2度現れた場合、両者は同じとは限らないことを注意しなければならない。具体的には、前者を $\int e^x \sin x dx = I + C$ と置けば、後者は $\int e^x \sin x dx = I + D$ というふうに、別の積分定数 D を使わなければならない。

さて、上記質問が出ない解答例として、

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= \int (e^x)' \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx\end{aligned}$$

となる。従って、 $e^x \sin x$ の原始関数を I とおけば、 $I + C_1 = e^x \sin x - e^x \cos x - (I + C_2)$ と書けるから、 $2I = e^x(\sin x - \cos x) - C_1 - C_2$ となり、 $I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) - C_1/2 - C_2/2$ を得る。故に $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$ となる。($C = -C_1/2 - C_2/2$ とおいた。)

(注) $\int e^x \sin x dx = \dots\dots = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$ より、

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + C$$

を得る、と説明している本もある。もちろん、 $\int e^x \sin x dx$ の意味を事前にしっかり教えておけばこれでも問題はない。この説明は $\int e^x \sin x dx = I$ とおいてないことに注意されたい。