

数学教材勉強会
フィボナッチ数の数理

入門&基本編から番外編まで
 平成21年3月19日
 秋田工業高等専門学校にて

自己紹介

数学教育の専門家でも
 フィボナッチ数の専門家でも
 ありません

森田純(筑波大学・数理物質科学研究科)

- 代数学
- 群論とリー環論
- カッツ・ムーディ・リー環と群
- 局所拡大アフィン・リー環と群
- ルート系・結晶・(非)周期構造・文字列

目次

- 入門編・・・自然な数学
 (教員免許更新試行講習より)
- 基本編・・・面白い数学
 (一般大学院生向けコロキウムより)
- 番外編・・・発見の数学
 (専門研究集会より)
 場外? 圏外? 例外? 案外? 望外?

第一章「入門編」

- フィボナッチの問題
- フィボナッチ数列
- 加法定理
- カッシーニ・シムソンの定理
- パスカルの三角形
- 黄金比

フィボナッチ数

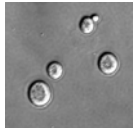
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...
 レオナルド・ダ・ピサ(1170-1250)
 レオナルド・フィリオ・ボナッチ
 レオナルド・フィボナッチ




ピサの商人ボナッチの息子
 ギリシア、エジプト、アラブを旅行
 アラビア数学をヨーロッパに紹介
 『算盤の書』(Liber Abaci)

フィボナッチの問題

ある生物の話


- 子は1日で親になる
- 親になると翌日から毎日1匹子を産む
- 子1匹から始めると、個体の総数は?

A=親、b=子

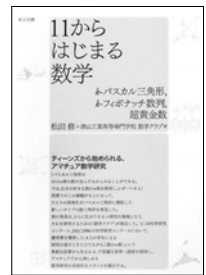
- P_1 : b (1)
- P_2 : A (1)
- P_3 : Ab (2)
- P_4 : AbA (3)
- P_5 : AbAAb (5)
- P_6 : AbAAbAbA (8)
- P_7 : AbAAbAbAAbAAb (13)

$$\frac{1}{\tau^2}, \frac{1}{\tau}$$



A=親、b=子 (再考)

- b (1)
- A (1)
- A|b (2)
- Ab|A (3)
- AbA|Ab (5)
- AbAAb|AbA (8)
- AbAAbAbA|AbAAb (13)



科学研究コンクール
優秀賞受賞2回

フィボナッチ数列

- 数列 $\{F_n\}_{n \geq 1}$
- $F_1 = 1, F_2 = 1$
- $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...
- $F_{n+2} = 3F_n - F_{n-2}$
 - ➔ 双曲型リー環のルート系(結晶構造)
 - ➔ $\alpha = F_{2n} \alpha_1 + F_{2n-2} \alpha_2$ ($n=1, 2, 3, \dots$)



ひまわりの花びら



花びらの枚数: 13、21、34、55枚が多い

フィボナッチ数列の一般項

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sigma = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \tau + \sigma = 1, \tau\sigma = -1$$

$$\tau^2 = \tau + 1, \sigma^2 = \sigma + 1, F_n = x\tau^n + y\sigma^n$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \begin{cases} \tau x + \sigma y = 1 \\ \tau^2 x + \sigma^2 y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}, y = \frac{-1}{\sqrt{5}}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n - \sigma^n)$$

自然界(花びらの数)

- 紫つゆ草(3)
- 桜(5)
- コスモス(8)
- やぐるま草(13)
- マーガレット(21)
- ひな菊(34, 55, 89 が多い)



基本的事実

$F_n = \frac{\tau^n}{\sqrt{5}}$ に最も近い整数 ($n=1,2,3,\dots$)

$F_{n+1} = \tau F_n$ に最も近い整数 ($n=2,3,4,\dots$)

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (黄金比)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

葉の生え方(葉序)

- ブナ・ハシバミ (1/3)
- カシ・アンズ (2/5)
- ポプラ・ナシ (3/8)
- ヤナギ・アーモンド (5/13)



加法定理

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n \quad (m \geq 2, n \geq 1)$$

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,...

$$m=6, n=7, m+n=13$$

$$233 = 8 \times 21 + 5 \times 13$$

$$m=5, n=10, m+n=15$$

$$610 = 5 \times 89 + 3 \times 55$$

カッシーニ・シムソンの定理

$$(1) \quad F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

$$(2) \quad F_{n-k} F_{n+k} - F_n^2 = (-1)^{n-k+1} F_k^2 \quad (1 \leq k < n)$$

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,...

$$n=6$$

$$5 \times 13 - 8^2 = 1 = (-1)^6$$

$$n=7, k=3$$

$$3 \times 55 - 13^2 = -4 = (-1)^5 \times 2^2$$

問題

- n 段の階段を昇るとき、1歩で1段または2段だけ昇るものとする。このとき、階段を昇る方法は何通りあるか？
- $+$ と $-$ を合わせて n 個並べるものとする。ただし、 $+$ と $+$ は隣り合わない規則である。このとき、並べ方の総数を求めよ。

答え

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_n = F_{n+1}$$

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$$

$$G_1 = 2, G_2 = 3, G_n = F_{n+2}$$

パスカルの三角形とフィボナッチ数

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

斜めに加えていくと

$n+1 = \text{奇数}$

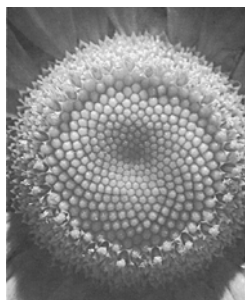
$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n/2}{n/2} = F_{n+1}$$

$n+1 = \text{偶数}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n+1/2}{n-1/2} = F_{n+1}$$

フィボナッチ数が復活する

フィボナッチ比と黄金比



ひな菊・右(21)左(34)

オウム貝の体積比
パルテノン神殿
縦横比



ダ・ヴィンチ・コード

フィボナッチ数も
出てくるよ!



わしの名前は
レオナルド・ダ・
ヴィンチ
本当の意味は
ヴィンチ村の
レオナルド

私の住んでいる
ルーヴル美術館
から始まるのよ



第二章「基本編」

- 生成関数(母関数)
- 連分数
- 行列と二次体
- リュカの定理
- 積公式
- フィボナッチ表現

フィボナッチ数列の生成関数

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \in \mathbf{R}[[x]]$$

$$r = F(x) \text{ の収束半径 } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\tau} \approx 0.618 \dots$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2-1/4} = 2$$

實際

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} \\ & + \frac{8}{2^6} + \frac{13}{2^7} + \frac{21}{2^8} + \frac{34}{2^9} + \frac{55}{2^{10}} \cdots \\ & = 2 \end{aligned}$$

實際

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} \\ & + \frac{8}{2^6} + \frac{13}{2^7} + \frac{21}{2^8} + \frac{34}{2^9} + \frac{55}{2^{10}} \cdots \\ & = 2 \end{aligned}$$

回路

A .--□--□--□--□--

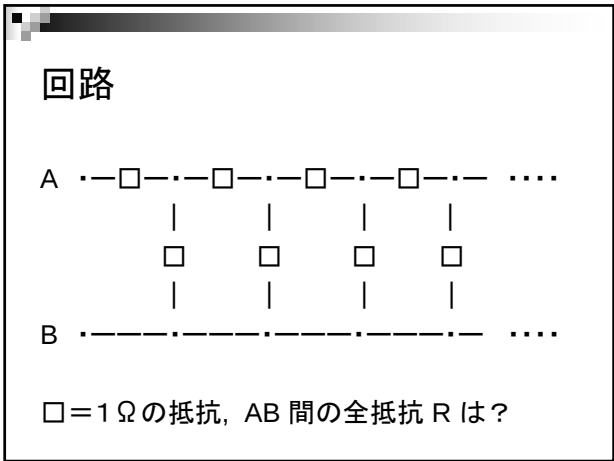
 | | | |

 □ □ □ □

 | | | |

B .----- .----- .----- .-----

□ = 1 Ω の抵抗, AB 間の全抵抗 R は？



回路

A .--□--□--□--□--

 | | | |

 □ □ □ □

 | | | |

B .----- .----- .----- .-----

□ = 1 Ω の抵抗, AB 間の全抵抗 R は？

連分数

$$1 + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

黄金比の連分数展開

$$R = 1 + \frac{1}{\frac{1}{R} + 1} \Rightarrow R^2 = R + 1 \Rightarrow R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$$

旧くから
知られていたが
組織的研究は
17世紀以降!

連分数

$$1 + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

黄金比の連分数展開

$$R = 1 + \frac{1}{\frac{1}{R} + 1} \Rightarrow R^2 = R + 1 \Rightarrow R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$$



旧くから
知られていたが
組織的研究は
17世紀以降!

連分数

$$1 + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

黄金比の連分数展開

$$R = 1 + \frac{1}{\frac{1}{R} + 1} \Rightarrow R^2 = R + 1 \Rightarrow R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$$



旧くから
知られていたが
組織的研究は
17世紀以降!

連分数

$$1 + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

黄金比の連分数展開

$$R = 1 + \frac{1}{\frac{1}{R} + 1} \Rightarrow R^2 = R + 1 \Rightarrow R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$$



旧くから
知られていたが
組織的研究は
17世紀以降!

連分数

$$1 + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

黄金比の連分数展開

$$R = 1 + \frac{1}{\frac{1}{R} + 1} \Rightarrow R^2 = R + 1 \Rightarrow R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$$



旧くから
知られていたが
組織的研究は
17世紀以降!

行列と二次体

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \tau & \sigma \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$
$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$
$$\tau^n = F_n \tau + F_{n-1}, \sigma^n = F_n \sigma + F_{n-1} \quad \text{in } \mathbf{Z}[\tau]$$

行列と二次体

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \tau & \sigma \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$
$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$
$$\tau^n = F_n \tau + F_{n-1}, \sigma^n = F_n \sigma + F_{n-1} \quad \text{in } \mathbf{Z}[\tau]$$

行列と二次体

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \tau & \sigma \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\tau^n = F_n \tau + F_{n-1}, \sigma^n = F_n \sigma + F_{n-1} \quad \text{in } \mathbf{Z}[\tau]$$

行列と二次体

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \tau & \sigma \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$
$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$
$$\tau^n = F_n \tau + F_{n-1}, \sigma^n = F_n \sigma + F_{n-1} \quad \text{in } \mathbf{Z}[\tau]$$

リュカの定理

$$m > 2$$

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n$$

一般に $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$

$$(F_8, F_{12}) = (21, 144) = 3 = F_4 = F_{(8,12)}$$

リュカの定理

$$m > 2$$

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n$$

一般に $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$




$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$

$$(F_8, F_{12}) = (21, 144) = 3 = F_4 = F_{(8,12)}$$

リュカの定理

$$m > 2$$

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n$$

一般に $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$




$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$

$$(F_8, F_{12}) = (21, 144) = 3 = F_4 = F_{(8,12)}$$

リュカの定理

$$m > 2$$

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n$$

一般に

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$$

リュカ数もあるんだけど
今回は省略！

括弧(,)は
最大公約数のことだよ！

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$$

$$(F_8, F_{12}) = (21, 144) = 3 = F_4 = F_{(8,12)}$$

リュカの定理

$$m > 2$$

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n$$

一般に

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$$

リュカ数もあるんだけど
今回は省略！

括弧(,)は
最大公約数のことだよ！

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$$

$$(F_8, F_{12}) = (21, 144) = 3 = F_4 = F_{(8,12)}$$

リュカの定理

$$m > 2$$

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n$$

一般に $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$




$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$

$$(F_8, F_{12}) = (21, 144) = 3 = F_4 = F_{(8,12)}$$

リュカの定理

$$m > 2$$

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n$$

一般に

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$$

リュカ数もあるんだけど
今回は省略！

括弧(,)は
最大公約数のことだよ！

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$$

$$(F_8, F_{12}) = (21, 144) = 3 = F_4 = F_{(8,12)}$$

リュカの定理

$$m > 2$$

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n$$

一般に $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$




$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$

$$(F_8, F_{12}) = (21, 144) = 3 = F_4 = F_{(8,12)}$$

三角関数との関係

$$\begin{aligned}a &= 3.0 + 2 \cos(2\pi/11) \approx 4.68251 \\b &= 3.0 + 2 \cos(4\pi/11) \approx 3.83083 \\c &= 3.0 + 2 \cos(6\pi/11) \approx 2.71537 \\d &= 3.0 + 2 \cos(8\pi/11) \approx 1.69028 \\e &= 3.0 + 2 \cos(10\pi/11) \approx 1.08101\end{aligned}$$

$$a \times b \times c \times d \times e \approx 88.9998$$

三角関数との関係

$$\begin{aligned}a &= 3.0 + 2 \cos(2\pi/11) \approx 4.68251 \\b &= 3.0 + 2 \cos(4\pi/11) \approx 3.83083 \\c &= 3.0 + 2 \cos(6\pi/11) \approx 2.71537 \\d &= 3.0 + 2 \cos(8\pi/11) \approx 1.69028 \\e &= 3.0 + 2 \cos(10\pi/11) \approx 1.08101\end{aligned}$$

$$a \times b \times c \times d \times e \approx 88.9998$$

三角関数との関係

$$\begin{aligned}a &= 3.0 + 2 \cos(2\pi/11) \approx 4.68251 \\b &= 3.0 + 2 \cos(4\pi/11) \approx 3.83083 \\c &= 3.0 + 2 \cos(6\pi/11) \approx 2.71537 \\d &= 3.0 + 2 \cos(8\pi/11) \approx 1.69028 \\e &= 3.0 + 2 \cos(10\pi/11) \approx 1.08101\end{aligned}$$

$$a \times b \times c \times d \times e \approx 88.9998$$

三角関数との関係

$$\begin{aligned}a &= 3.0 + 2 \cos(2\pi/11) \approx 4.68251 \\b &= 3.0 + 2 \cos(4\pi/11) \approx 3.83083 \\c &= 3.0 + 2 \cos(6\pi/11) \approx 2.71537 \\d &= 3.0 + 2 \cos(8\pi/11) \approx 1.69028 \\e &= 3.0 + 2 \cos(10\pi/11) \approx 1.08101\end{aligned}$$

$$a \times b \times c \times d \times e \approx 88.9998$$

三角関数との関係

$$\begin{aligned}a &= 3.0 + 2 \cos(2\pi/11) \approx 4.68251 \\b &= 3.0 + 2 \cos(4\pi/11) \approx 3.83083 \\c &= 3.0 + 2 \cos(6\pi/11) \approx 2.71537 \\d &= 3.0 + 2 \cos(8\pi/11) \approx 1.69028 \\e &= 3.0 + 2 \cos(10\pi/11) \approx 1.08101\end{aligned}$$

$$a \times b \times c \times d \times e \approx 88.9998$$

三角関数との関係

$$\begin{aligned}a &= 3.0 + 2 \cos(2\pi/11) \approx 4.68251 \\b &= 3.0 + 2 \cos(4\pi/11) \approx 3.83083 \\c &= 3.0 + 2 \cos(6\pi/11) \approx 2.71537 \\d &= 3.0 + 2 \cos(8\pi/11) \approx 1.69028 \\e &= 3.0 + 2 \cos(10\pi/11) \approx 1.08101\end{aligned}$$

$$a \times b \times c \times d \times e \approx 88.9998$$

三角関数との関係

$$\begin{aligned}a &= 3.0 + 2 \cos(2\pi/11) \approx 4.68251 \\b &= 3.0 + 2 \cos(4\pi/11) \approx 3.83083 \\c &= 3.0 + 2 \cos(6\pi/11) \approx 2.71537 \\d &= 3.0 + 2 \cos(8\pi/11) \approx 1.69028 \\e &= 3.0 + 2 \cos(10\pi/11) \approx 1.08101\end{aligned}$$

$$a \times b \times c \times d \times e \approx 88.9998$$

積公式

三角関数の値は、一般には無理数
なんだけど、掛け合わせると整数に
なってしまうのは誠に不思議！！



$$F_n = \prod_{1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (3 + 2 \cos(\frac{2k\pi}{n}))$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

チェビシェフ多項式

$$x = \cos \theta$$

$$T_n(x) = \cos n\theta$$

第一種チェビシェフ多項式

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

第二種チェビシェフ多項式

$$t_n(x) = 2T_n(x/2), u_n(x) = U_n(x/2) \quad \text{変形}$$

漸化式と冪差表示

$$u_0(x) = 1, u_1(x) = x$$

$$u_{n+2}(x) = xu_{n+1}(x) - u_n(x)$$

$$u_n(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \left\{ \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

フィボナッチ数との関係

$$u_{n-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 1, 2, \dots, [n/2]$$

$$u_{n-1}(\sqrt{-1}) = (\sqrt{-1})^{n-1} F_n$$

$$n = 5$$

$$u_4(x) = x^4 - 3x^2 + 1 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)$$

$$\Rightarrow x = \pm \tau, \pm \sigma \Rightarrow x = \pm 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \pm 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

フィボナッチ表現

自然数 n は、隣り合わないフィボナッチ数の和として書き表すことができる。

$$n = \sum_{i \geq 2} c_i F_i$$

$$c_i = 0, 1 \quad (c_i c_{i+1} = 0)$$

$$n = (\dots c_4 c_3 c_2)_F$$

問題

■ 300 のフィボナッチ表現を求めよ。

表示の見つけ方

- n を超えない最大のフィボナッチ数を F_*
- $n - F_*$ を超えない最大のフィボナッチ数を F_{**}
- これを続ける
- 最後に

$$n = F_* + F_{**} + \cdots + F_{***}$$

答え

$$300 - 233 = 67, 67 - 55 = 12 \\ 12 - 8 = 4, 4 - 3 = 1$$

$$300 \\ = 233 + 55 + 8 + 3 + 1 \\ = F_{13} + F_{10} + F_6 + F_4 + F_2 \\ = (100100010101)_F$$

第三章「番外編」

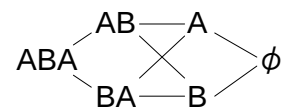
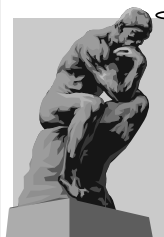
- 文字列・記号列
- 代数系・表現
- 組合せ・パターン
- 特徴付け

場外編

- 数値化・数式化・応用へ

考える語

私は語(文字列)である
私の内部構造って?



A=親、b=子(再々考)

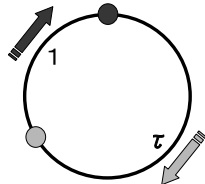
- P_1 : b (1)
- P_2 : A (1)
- P_3 : Ab (2)
- P_4 : AbA (3)
- P_5 : AbAAb (5)
- P_6 : AbAAbAbA (8)
- P_7 : AbAAbAbAAbAAb (13)

フィボナッチ無限列

- P_∞ : AbAAbAbAAbAAb...
- 非周期的である
- ランダムではない
- 規則性がある(準周期的という)
- 似た模様が至る所にある
- 両側無限に伸ばすことも可能
- ...AbAAbAbAAbAAb|AbAAbAbAAbAAb...

記号力学系

- $A \rightarrow AbA, b \rightarrow Ab$ 代入規則
- $b|A$ から左右に出発
- $Ab|AbA$
- $AbAAb|AbAAbAbA$
- $\dots AbAAb|AbAAbAbA \dots$



局所識別不能性



T, T' : (両側) 無限文字列

$T \sim_{l.i.} T'$: 局所識別不能

$\Leftrightarrow_{def}$ 局所的な模様では区別ができない

代数化 (Kellendonk 積)

$W(T)$ = T の連続有限部分列全体

$A(T) = \langle w(i, j) \mid w \in W(T), 1 \leq i, j \leq l(w) \rangle$

$$w(i, j) \bullet w'(i', j') = \begin{cases} w''(i'', j'') \\ 0 \end{cases}$$

$A(T)$ = 代数系の導入

$M(T) = \{V : \text{標準加群}\}$ の構造

演算例

$w = ABAB, w' = AABA \in W(T)$

$w(1,3), w'(4,3) \in A(T)$

$w(1,3) \bullet w'(4,3)$

$$= \begin{cases} w''(2,3) & \text{if } w'' = AABAB \in W(T) \\ 0 & \text{if } AABAB \notin W(T) \end{cases}$$

$w'(4,3) \bullet w(1,3) = 0$

既約標準加群

$$V_w = Cw(1,1) \oplus \dots \oplus Cw(l(w),1)$$

$$v = w'(i, j) \bullet w(k,1)$$

$$w'(i, j) \bullet w(k,1) = \begin{cases} v & (v \in V_w) \\ 0 & (v \notin V_w) \end{cases}$$

$$A(T) \rightarrow \text{End}(V_w) = M_{l(w)}(\mathbb{C})$$

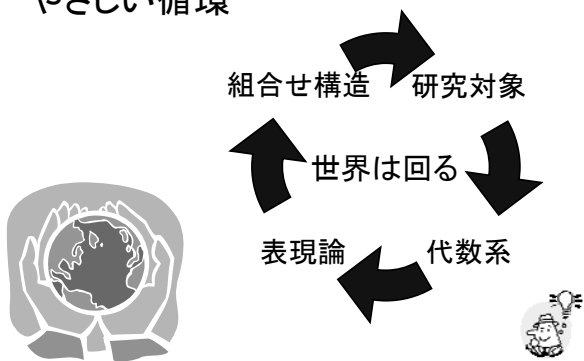
$$w(i, j)w(k, \ell) = \delta_{jk} w(i, \ell) \in M_{l(w)}(\mathbb{C})$$

テンソル積分分解の組合せ構造

	A	B	A	A	B
A	A	ϕ	A	A	ϕ
B	ϕ	B	ϕ	ϕ	B
A	A	ϕ	A	A	ϕ
A	A	ϕ	A	A	ϕ
B	ϕ	B	ϕ	ϕ	B

$$V_{ABAB} \otimes V_{ABAB} = V_{ABAB} \oplus V_{AB}^{\oplus 2} \oplus V_A^{\oplus 4} \oplus V_{\phi}^{\oplus 12}$$

やさしい循環



定理(特徴付け)

次の4条件は同値

- T, T' : 両側無限文字列が局所識別不能
- $A(T), A(T')$: 代数系(双代数)が同型
- 標準加群のテンソル積分解が同じ
- 組合せ構造が同等

数学的・代数的にハッピー

数量化の試み

- 配置・配列の組合せパターン
- 数式化(数値・級数が出てくる仕組み)
- $V \otimes V = V \oplus$ (低い次元の直和)
- $\phi \rightarrow 1$ は $w \rightarrow \dim V_w$ を誘導
- $\phi \rightarrow$ 実数, $w \rightarrow$ 実数
- $\phi \rightarrow$ 変数, $w \rightarrow$ 級数

級数化の例($\phi \rightarrow t$ の場合)

ABAAB

$\Downarrow$

$$f_{ABAAB}(t) = 3 + \frac{16}{5}t - \frac{456}{125}t^2 + \frac{34592}{3125}t^3 - \frac{762976}{15625}t^4 + \dots$$

現象(発見)

フィボナッチの親子問題

$P_n = n$ 日目の文字列

$$f_{P_n}(t) = \sum a_i t^i \in \mathbf{R}[[t]]$$

$$\Rightarrow a_0 = F_{n-1} \in \mathbf{Z}, a_i \in \mathbf{Q}$$

定理(萌芽的)

こういう単語は
全部で F_{n+1} 通り
覚えてますか?

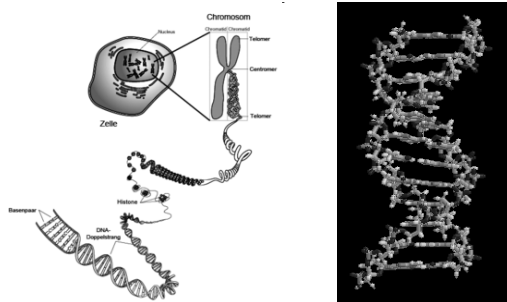
$$w = X_1 X_2 \cdots X_n$$

$$X_i \in \{A, B\}, X_1 = A$$

B は 2 回以上連続しない

$$\Rightarrow f_w(t) \in \mathbf{Q}[[t]], f_w(0) = A \text{ の個数}$$

細胞中の染色体とDNA



イネ

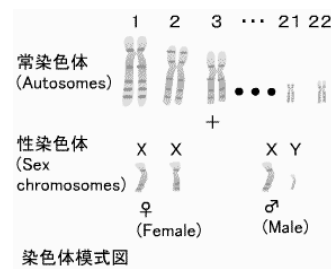


イネ黄斑病ウイルス遺伝子(長さ220)

$a = \text{CCAGCUGCGC AGG}$ (最初の13文字)

$$f_a(t) = \frac{1 + \sqrt{129}}{2} + \frac{46\sqrt{129}}{43}t - \frac{3492\sqrt{129}}{1849}t^2 + \dots$$

性染色体



ヒトゲノム性決定遺伝子SRY(長さ615)

$b = \text{ATGCAATCAT ATG}$ (最初の13文字)

$$f_b(t) = 5 + \frac{52}{3}t - \frac{3784}{81}t^2 + \frac{650144}{2187}t^3 - \frac{173262752}{59049}t^4 + \dots$$

終