

Proceedings of the 28th Summer Seminar
on
Lie Algebras and Related Topics

Held at Yamaguchi University,
August 24 – 25, 2012

Yamaguchi, Japan

Preface

The 28th Summer Seminar on Lie Algebras and Related Topics was held at Yamaguchi University, Yamaguchi on August 24 – 25, 2012.

The lectures ranged far and wide concerning Lie algebras and related algebraic systems. We would like to thank the lecturers and the participants for their interesting talks and valuable comments. We would like to also appreciate the support of the Faculty of Economics, Yamaguchi University.

Yoshimi Kashiwagi
Toshiharu Ikeda

Contents

IKEDA, Toshiharu	
Simple n -Block algebras の同型定理	1
KUBO, Fujio	
Deformation theory of low dimensional algebras	6
KASHIWAGI, Yoshimi	
Pless power moment and 2-weight projective codes	14
YOSHII, Yoji	
新種の多項式について	24
SAKAMOTO, Takanori and HONDA, Masanobu	
Some properties of factorized Lie algebras II	34
YAMANE, Hiroyuki	
Weyl groupoid について	40
KAWAMOTO, Naoki	
ある有理式環の微分代数について	47

Simple n -Block algebras の同型定理

池田敏春（九州工業大学大学院工学研究院）

1. 導入と準備

Lie algebra の n 項積への一般化である n -Lie algebra は、最初 Filippov たちにより導入された ([3], [8])。それはまた、(generalized) Nambu mechanics を記述する Nambu algebra としても現れた (cf. [2, 6, 8])。一方では、いろいろな形に一般化された Cartan 型の無限次元 Lie algebras が多くの研究者により導入され研究されており、そのなかに W, H-types の融合型の系列に (generalized) Block algebra がある。その典型的なものは、additive group G の添数をもった基底 $\{e_g\}_{g \in G}$ をもち、リー積が

$$[e_g, e_h] = \varepsilon(g, h)e_{g+h},$$

(ただし、 ε は skew-symmetric additive form) で与えられるものである。この Block algebra を n -Lie algebra 拡張してその構造や性質が以前に調べられた (cf. [4])。ここでは、問題として残されていた同型定理について述べる (cf. [5])。

G は additive group、 F は標数 0 の field とし、

$$\nu : \overbrace{G \times \cdots \times G}^n \longrightarrow F$$

を n -multi-additive skew-symmetric form とする。次に基底 $\{E_g \mid g \in G\}$ をもつベクトル空間 V 上に n 項積を次のように定義する。

$$[E_{g_1}, \cdots, E_{g_n}] = \nu(g_1, \cdots, g_n)E_{g_1 + \cdots + g_n} \quad (g_1, \cdots, g_n \in G)$$

V は次の n -Jacobi identity **みたすとき**、 n -Lie algebra と呼ばれる。

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{n-1}, [y_1, \dots, y_n]] &= [[x_1, \dots, x_{n-1}, y_1], y_2, \dots, y_n] \\ &+ [y_1, [x_1, \dots, x_{n-1}, y_2], y_3, \dots, y_n] \\ &+ \dots + [y_1, \dots, y_{n-1}, [x_1, \dots, x_{n-1}, y_n]]. \end{aligned}$$

V に n -Lie algebra の構造をいれるため、 ν は次の関係式をみたすとする。

$$\sum_{i=1}^n \nu(g_1, \dots, g_{n-1}, h_i) \nu(h_1, \dots, h_{i-1}, g_1 + \dots + g_{n-1}, h_{i+1}, \dots, h_n) = 0$$

このとき、 V を n -Lie algebra of Block type と呼び、 $V_n(G)$ または $V_n(G, \nu)$ で表すことにする。

$V = V_n(G)$ の構造について、以前の結果を簡単に述べる。 ν に関する G の radical は $\text{rad} \nu = \{a \in G \mid \nu(a, g_1, \dots, g_{n-1}) = 0 \ (\forall g_1, \dots, g_{n-1} \in G)\}$, V の center は $\zeta(V) = \{z \in V \mid [z, x_1, \dots, x_{n-1}] = 0 \ (\forall x_1, \dots, x_{n-1} \in V)\}$ で定義され、次が成り立つ。

Proposition A. n -Lie algebra of Block type $V = V_n(G)$ に対して

- (1) $\zeta(V) = \sum_{a \in \text{rad} \nu} \langle E_a \rangle$,
- (2) $V^{[1]} = [V, \dots, V] = \sum_{a \in G \setminus \text{rad} \nu} \langle E_a \rangle$,
- (3) $V = \zeta(V) \oplus V^{[1]}$.

$\{E_g \mid g \in G \setminus \{0\}\}$ により生成される V の maximal subalgebra を n -Block algebra w.r.t. ν と呼び、 $B_n(G, \nu)$ で表す。

Theorem B. $\nu \neq 0$ のとき、 $B_n(G, \nu)$ が simple n -Lie algebra であるための必要十分条件は $\text{rad} \nu = \{0\}$ である。

Theorem C. $V = V_n(G, \nu)$ の derivation algebra $\text{Der}(V)$ は

$$\text{Der}(V) = \text{Linn}(V) \rtimes \text{Cder}(V) \quad (\text{semidirect sum})$$

である。ここで、 $\text{Linn}(V)$ は locally inner derivations の全体、 $\text{Cder}(V)$ は central derivations の全体である。

2. n -additive map と同型定理

2つの additive groups の間の map $\phi : G \longrightarrow H$ が *almost n -additive* w.r.t ν とは、

$$\phi(g_1 + \cdots + g_n) = \phi(g_1) + \cdots + \phi(g_n) \quad \text{if } \nu(g_1, \cdots, g_n) \neq 0$$

を満たすときをいう。これについて、次が成り立つ。

Proposition 1. G, H が torsion-free additive groups のとき、

$$\phi : G \longrightarrow H \text{ が almost } n\text{-additive w.r.t } \nu \iff \phi = \phi_0 + \phi_1$$

ここで、 ϕ_0 は additive map、 ϕ_1 は $G \setminus \text{rad } \nu$ 上で 0 となる map である。

simple n -Block algebras の同型定理を得るため、その subspaces $\langle E_g \rangle$ ($g \in G$) をコントロールできるものとして locally finite derivations ∂ of V を掌握したい。これについて、次のことが成り立つ。

Lemma 2. $B = B_n(G, \nu)$ が simple n -Block algebra with $\text{rank } G < \infty$ のとき、locally finite derivation of B はある central derivation of V の B への制限である。

Lemma 2 の仮定 $\text{rank } G < \infty$ を除けるかどうかは分かっていないが、この Lemma と Proposition 1 を用いて次が成り立つ。

Theorem 3. $B_n(G, \nu), B_n(H, \mu)$ を simple n -Block algebras で $\text{rank } G, \text{rank } H < \infty$ とする。このとき

$$\psi : B_n(G, \nu) \longrightarrow B_n(H, \mu) \text{ が } n\text{-Lie isomorphism}$$

$$\iff$$

$$\exists \text{group isom. } \phi : G \longrightarrow H, \exists \text{character } \chi \text{ of } G, \exists \alpha \in F^* \quad \text{s.t.}$$

$$\psi(E_g) = \alpha \chi(g) E_{\phi(g)} \quad (g \in G \setminus \{0\}),$$

$$\alpha^{n-1} \mu(\phi(g_1), \cdots, \phi(g_n)) = \nu(g_1, \cdots, g_n). \quad (*)$$

simple n -Block algebra $B = B_n(G, \nu)$ について, $\chi \in X(G)$ (= character group of G) に対して, $\theta_\chi(E_g) = \chi(g)E_g$ により $\theta_\chi \in \text{Aut}(B)$ であり, $X(G) \leq \text{Aut}(B)$ と見なされる。また,

$$Y_\nu = \{(\phi, \alpha) \in \text{Aut}(G) \times F^* \mid \mu = \nu \text{としたときの } (*) \text{ を満たす} \}$$

は, $\psi_{(\phi, \alpha)}(E_g) = \alpha E_{\phi(g)}$ により $\psi_{(\phi, \alpha)} \in \text{Aut}(B)$ であり, $Y_\nu(G) \leq \text{Aut}(B)$ と見なされ, $\psi_{(\phi, \alpha)^{-1}} \theta_\chi \psi_{(\phi, \alpha)} = \theta_{\chi\phi}$ より $X(G) \triangleleft \text{Aut}(B)$ である。これらより次が成り立つ。

Corollary 4. simple n -Block algebra $B_n(G, \nu)$ with $\text{rank } G < \infty$ のとき

$$\text{Aut}(B_n(G, \nu)) \cong X(G) \rtimes Y_\nu(G) \quad (\text{semidirect product})$$

Example. $G = \mathbf{Z}^n$, $\nu = \det$ としたとき, $B_n(\mathbf{Z}^n, \det)$ は simple n -Block algebra である。 $X(G) \cong (F^*)^n$, $\text{Aut}(G) = GL_n(\mathbf{Z})$, $Y_{\det}(G) = \{(\phi, \alpha) \in GL_n(\mathbf{Z}) \times F^* \mid \det \phi = \alpha^{n-1}\}$ であり, $C_{F(k)} = \{\zeta \in F \mid \zeta^k = 1\}$ とするとき,

$$\begin{aligned} & \text{Aut}(B_n(\mathbf{Z}^n, \det)) \\ & \cong \begin{cases} (F^*)^n \rtimes (SL_n(\mathbf{Z}) \rtimes C_{F(2n-2)}) & \text{if } F \text{ has an } (n-1)\text{-th root of } -1 \\ (F^*)^n \rtimes (SL_n(\mathbf{Z}) \times C_{F(n-1)}) & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

参考文献

- [1] R. Block, On torsion-free abelian groups and Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **9**(1958), 613–620.
- [2] Y. Daletskii and L. Takhtajan, Leibniz and Lie algebra structures for Nambu algebra, Lett. Math. Phys. **39**(1997), 127–141.
- [3] V. T. Filippov, n -Lie algebras, Sibirsk. Math. Zh. **26**(1985), 126–140.
- [4] T. Ikeda, An n -Lie algebra of Block type, JP J. Algebra Number Theory Appl. **4**(2004), 503–518.

- [5] T. Ikeda, An isomorphism theorem for simple n -Block algebras, *Pioneer J. Algebra Number Theory Appl.* **3**(2012), 27–41.
- [6] N. Nambu, Generalized Hamiltonian mechanics, *Phys. Rev.* **D7**(1973), 2405–2412.
- [7] J. M. Osborn and D. S. Passman, Derivations of skew polynomial rings, *J. Algebra* **176**(1995), 417–448.
- [8] L. Takhtajan, On foundation of the generalized Nambu mechanics, *Commun. Math. Phys.* **160**(1994), 295–315.

Deformation theory of low dimensional algebras

広島大学大学院工学研究院

久保富士男

広島大学理学部代数学セミナーで大学院生以上に Gerstenhaber の代数的変形理論入門の講演の機会を得た。これを機に、この理論の初等的入門の講義ノートを作成を始めた。この小文では、具体的で簡単な例のより詳しい解析を通して、理論の全体像を紹介する。以下の2つの文献を用いた：

M.Gerstenhaber *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. 79(1964) 59-103

M.Gerstenhaber & S.D.Schack *Algebraic cohomology and deformation theory*, in: Mazewinkel and M.Gerstenhaber eds., Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988) 11-264

1 最初の例（典型的な例）

$k[[t]][x]/(f(x) + tg(x))$ は $k[x]/(f(x))$ の変形を与える。
なぜ？ 変形の定義に合っているか？

もっと具体的に、 $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ とおき、 t を変形パラメータとする。したがって、上記は

$k[[t]][x]/(x^2 + tx)$ は $k[x]/(x^2)$ の変形を与える。

となる。乗積表では

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c} & 1 & x \\ \hline 1 & 1 & x \\ \hline x & x & 0 \\ \hline \end{array} \\ \dots\dots\dots \\ k[x]/(x^2) \end{array} \quad \xRightarrow{\text{変形}} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c} & 1 & x \\ \hline 1 & 1 & x \\ \hline x & x & -tx \\ \hline \end{array} \\ \dots\dots\dots \\ k[x]/(x^2 + tx) \end{array}$$

と表せる。

1.1 変形の定義

定義 A を体 k 上の結合代数．その積を $\alpha : A \times A \rightarrow A$ とおく．その変形は形式的べき級数 $k[[t]]$ 上の A の元を係数にもつ形式的べき級数 $A[[t]]$ でその積を

$$\begin{aligned}\alpha_t(x, y) & (= x *_t y) \\ & := \alpha(x, y) + t\alpha_1(x, y) + t^2\alpha_2(x, y) + \cdots \quad (x, y \in A)\end{aligned}$$

とする．ここに， $\alpha_i : A \times A \rightarrow A$ は k -bilinear である．

	代数	変形代数
Space	k space A	$k[[t]]$ space $A[[t]]$
product(map)	k bilinear map $\alpha : A \times A \rightarrow A$	$k[[t]]$ linear map $\alpha_t : A[[t]] \times A[[t]] \rightarrow A[[t]]$
	$\alpha_t = \alpha + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots$	
product(operator)	$x \circ y = \alpha(x, y)$	$x *_t y = \alpha_t(x, y)$
(注)	α_t も結合法則を満たすことが要求されている	

Null deformation $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$ である変形を null deformation といい， A_0 で表す．このとき，変形 $A_0 = k[[t]] \otimes_k A$ の積は

$$(p(t) \otimes a) *_t (q(t) \otimes b) = (p(t)q(t)) \otimes ab$$

で与えられる．

補足

- (1) 変形の別表現： $k[[t]]$ 加群 M が t -adic complete & t -torsion free のとき， M は $M_0 = M \otimes_{k[[t]]} k$ の変形 $M_0[[t]]$ である．

実際， $m \in M$ に対して， $m_0 = m \times 1$ とおく． $m - m_0 \in tM$ だから， $m - m_0 = tm'_1$ ， $m'_1 - m_1 \in tM$ ， $m_1 \in M_0$ とおく．同様にして， M_0 の元の列 $m_0, m_1, m_2, \cdots$ を求めると， $S_n = m_0 + tm_1 + t^2m_2 + \cdots$ は M の Cauchy 列であるから M に属する．

- (2) A が有限次元であるとき， $A[[t]] = k[[t]] \otimes_k M$ である．
 (3) $k[[t]][x]/(x^2 + tx)$ は結合代数であるから，変形に要求される結合法則をもちろん満たす．

1.2 $k[[t]]/(x^2 + tx)$ は $k[[t]]/(x^2)$ の変形である

A の基底 $\{x_1, \dots, x_n\}$ の間の積 $x_i \circ x_j$ を行列 $(x_i \circ x_j)$ で表し, 双一次形式 β を行列 $(\beta(x_i, x_j))$ で表すと

$$(\alpha_t(x_i, x_j)) = (\alpha(x_i, x_j)) + t(\alpha_1(x_i, x_j)) + t^2(\alpha_2(x_i, x_j)) + \dots$$

と表せる. この表記を用いると,

$$\begin{pmatrix} \alpha_t(1, 1) & \alpha_t(1, x) \\ \alpha_t(x, 1) & \alpha_t(x, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -tx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$$

2 A brief sketch of Gerstenhaber's deformation theory

2.1 変形方程式とコホモロジー

結合代数 A の変形を $A_t = (A[[t]], \alpha_t) = (A[[t]], *_t)$ と書こう. 再録すると,

$$\begin{aligned} A[[t]] &= \{a_0 + ta_1 + t^2a_2 + \dots \mid a_i \in A\}, \\ x *_t y &= \alpha_t(x, y) = \alpha(x, y) + t\alpha_1(x, y) + t^2\alpha_2(x, y) + \dots, \\ \alpha_i : A \times A &\rightarrow A \text{ は } k\text{-bilinear であり, } \alpha_0 = \alpha \text{ とおく.} \end{aligned}$$

要求される条件 結合代数, リー代数, ... の変形 A_t はそれぞれ, 結合代数, リー代数, ... であることが要求される.

結合代数の変形方程式 $\alpha_t(\alpha_t(a, b), c) = \alpha_t(a, \alpha_t(b, c))$ から, 変形方程式

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p>0, q>0}} \{\alpha_p(\alpha_q(a, b), c) - \alpha_p(a, \alpha_q(b, c))\} = (\delta^2 \alpha_n)(a, b, c),$$

を得る. ここで, $\delta^n : \text{Hom}_k(A^n, A) \rightarrow \text{Hom}_k(A^{n+1}, A)$ は Hochschild coboundary operator で次式で定義される:

$$\begin{aligned} \delta^n f(a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_1 f(a_2, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(a_1, \dots, a_n) a_{n+1} \end{aligned}$$

変形程式に現れる δ^2 は $n = 2$ の場合である.

Hochschild Cohomology Hochschild cohomology group $H^n(A, A)$
 は $Z^n(A, A) = \text{Ker}\delta^n$, $B^n(A, A) = \text{Im}\delta^n$ において

$$H^n(A, A) = Z^n(A, A)/B^n(A, A)$$

で定義される .

Associator を用いた変形方程式 $f, g \in \text{Hom}(A^2, A)$ に対して , f, g の
 associator $f\bar{\circ}g$ を

$$f\bar{\circ}g(a, b, c) = f(g(a, b)c) - f(a, g(b, c))$$

で定義すると , 変形方程式は

$$\alpha_1\bar{\circ}\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\bar{\circ}\alpha_1 = \delta^2\alpha_n$$

と表される .

2.2 無限小変形

変形方程式において , $n = 1$ のときの $\delta^2\alpha_1 = 0$ は

$$\delta^2\alpha_1(a, b, c) = a\alpha_1(b, c) - \alpha_1(ab, c) + \alpha_1(a, bc) - \alpha_1(a, b)c$$

($xy = \alpha(x, y)$ と書いた) と表せる . また ,

$$\alpha_1 \in Z^2(A, A)$$

である . α_1 を変形の無限小変形という .

2.3 同値な変形

A_t , A'_t は A の変形で , $\alpha'_t := \alpha + t\alpha'_1 + t^2\alpha'_2 + \cdots$ とする . $k[[t]]$ - 同
 型写像 $f_t : A'_t \rightarrow A_t$:

$$\begin{aligned} f_t &= 1_A + tf_1 + t^2f_2 + \cdots, \quad (f_i \in \text{Hom}_k(A, A)) \\ \alpha'_t(a, b) &= f_t^{-1}\alpha_t(f_t(a), f_t(b)) \\ &= f_t^{-1}\alpha_t(f_t, f_t)(a, b), \quad (a, b \in A) \end{aligned}$$

が存在するとき , A'_t と A_t は同値であるといい , $A'_t \sim A_t$ と表す . この
 とき , $a * b = \alpha'_t(a, b)$, $a \circ b = \alpha_t(a, b)$ とおくと , $f_t(a * b) = f_t(a) \circ f_t(b)$,
 すなわち , 代数としての同型写像を表している .

2.4 剛性

定義 A のすべての変形 A_t が null deformation A_0 に同値であるとき， A は剛性であるという．

定理（剛性の判定法）（Gerstenhaber） $H^2(A, A) = 0$ ならば， A は剛性である．特に， A が分離的であれば， A は剛性である．

2.5 可積分

定義 2-cocycle $\alpha_1 \in Z^2(A, A)$ は，それを線形項とする変形

$$\alpha_t = \alpha + t\underline{\alpha_1} + t^2\alpha_2 + \cdots$$

が存在するとき，可積分であるとよばれる．

定理（可積分の判定法）（Gerstenhaber） $H^3(A, A) = 0$ ならば， A は可積分である．

実際，変形方程式の左辺 $\alpha_1 \circ \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \circ \alpha_1$ は 3-cocycle であるから，仮定より，変形方程式の左辺 $\in B^2(A, A) = \text{Im} \delta^2$ となる．したがって，帰納的に $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ から変形方程式を満たす α_n を構成できる．

3 例たち

3.1 無限次元結合代数の変形

$A = \mathbb{R}[x, y]$ に対して，

$$\alpha_t(p, q) = pq + t \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n p}{\partial x^n} \frac{\partial^n q}{\partial y^n} + \cdots$$

とおくと，非可換な結合積

$$x *_t y = xy + t, \quad y *_t ax = yx$$

を得る．

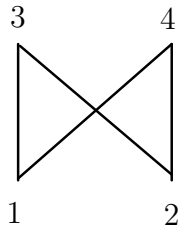
3.2 Poset algebras

ポイント 視覚的な位相幾何学のコホモロジーから $H^n(A, A)$ が計算可能

$I = (\{1, 2, 3, 4\}, <)$ を半順序 $1 < 3, 1 < 4, 2 < 3, 2 < 4$ をもつ Poset (Partially Ordered Set) とする. I に対応する Poset algebra $A = A(I)$ は 4×4 行列の部分代数で,

$$A = kE_{13} + kE_{14} + kE_{23} + kE_{24}, \quad E_{ij} \text{ は } (ij) \text{ 行列単位}$$

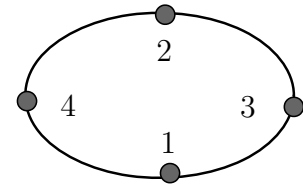
と定義される. I の幾何学的実現 $\Sigma = \Sigma(I)$ は, この場合, 0 単体 $\{1, 2, 3, 4\}$ と 1 単体 $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ の和集合である ($1 < 2 < 3$ を含む poset を考える場合は 2 単体 $(1, 2, 3)$ が追加される)



Poset I

$$\left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

Poset algebra $A(I)$



Geometric Realization $\Sigma(I)$

定理 (Gerstenhaber & Schack) $H^n(\Sigma, k) \equiv H^n(A, A)$.

具体的な同型写像 $\tau : C^p(\Sigma, k) \rightarrow C^p(A(I), A(I))$ は以下の通りである : $C_p(\Sigma)$ は Σ の p 単体全体の集合, $C^p(\Sigma, k) = \text{Hom}_k(C_p(\Sigma), k)$, $C^p(A(I))$ は p -chain 全体の集合である. p 単体 $(i_0, i_1, \dots, i_p)$, $f \in \text{Hom}_k(C_p(\Sigma), k)$ について,

$$(\tau f)(E_{i_0 i_1}, \dots, E_{i_{p-1} i_p}) = f((i_0, \dots, i_p)) E_{i_0 i_p}.$$

注意 正確には $H^n(A(I), A(I))$ は対角行列全体 S についての S -relative cohomology である.

例の代数の剛性と可積分 位相幾何学の基本的な計算から

$$H^0(A(I), A(I)) \cong H^0(\Sigma, k) = k$$

$$H^1(A(I), A(I)) \cong H^1(\Sigma, k) = k$$

$$H^2(A(I), A(I)) \cong H^2(\Sigma, k) = 0$$

$$H^3(A(I), A(I)) \cong H^3(\Sigma, k) = 0$$

したがって, A は剛性であり, 可積分である.

3.3 変形の同値を与える同型写像

Gerstenhaber & Shack (G&S) は

Deformation theory は具体的な同型写像を描写する

と言っている. その意味は? 以下の例で説明する.

$A_t = k[[t]][x]/(x^2 - 1 - tx)$ とおく. 我々の表記法を用いると

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1+tx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Step 1 $A = k[x]/(x^2-1)$ とおく. x^2-1 は separable であるから, $H^2(A, A) = 0$ である. したがって, A は剛性であり, 同型写像

$$f_t := 1_A + tf_1 + t^2f_2 + \cdots : (A[[t]], \alpha_t) \rightarrow (A[[t]], \alpha)$$

を与える. f_t は何か?

Step 2 $\alpha_1 = \delta f \cdots (\sharp)$ となる $f : A \rightarrow A$ を見つける. ここで,

$$\delta f(x, y) = xf(y) - f(xy) + f(x)y$$

である. $(\sharp)$ を解く. 例えば, $x = y = 1$ において, $0 = f(1) - f(1) + f(1)$ より $f(1) = 0$, $x = y = x$ において, $x = xf(x) - f(1) + f(x)x$ より $f(x) = 1/2$. したがって,

$$f(1) = 0, f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \delta f \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & 1 & x \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline x & 0 & x \end{array}$$

Step 3 α_t の 1 次の項 α_1 を消去 (2 次の項 α'_2 が出現する)

$$\alpha'_t = \alpha_t * (1 - tf) = (1 - tf)^{-1} \circ \alpha_t \circ (1 - tf, 1 - tf)$$

を計算すると , $\alpha'_t(x, x) = (1 - tf)^{-1} \alpha_t(x - (1/2)t, x - (1/2)t) = (1 + tf + t^2 f^2 + \cdots)(1 + tx - tx + (1/4)t^2) = (1 + tf + t^2 f^2 + \cdots)(1 + (1/4)t^2) = 1 + (1/4)t^2$ であるから ,

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha'_t & 1 & x \\ \hline 1 & 1 & x \\ \hline x & x & 1 + \frac{1}{4}t^2 \end{array} \Rightarrow \alpha'_t = \alpha + t^2 \alpha'_2 \quad \begin{array}{c|c|c} \alpha'_2 & 1 & x \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline x & 0 & 1/4 \end{array}$$

Step 4 α'_t の 2 次の項 α'_2 を消去 (4 次の項 α'_4 が出現する)

この場合は , $\alpha'_2 = \delta g$ を解いて , $g(1) = 0$, $g(x) = x/8$ を得る .
Step 3 と同様に

$$\alpha''_t = \alpha'_t * (1 - t^2 g) = (1 - t^2 g)^{-1} \circ \alpha'_t \circ (1 - t^2 g, 1 - t^2 g)$$

を計算して .

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha''_t & 1 & x \\ \hline 1 & 1 & x \\ \hline x & x & 1 - \frac{3}{64}t^4 + \frac{1}{512}t^6 \end{array} \Rightarrow \alpha''_t = \alpha + t^4 \alpha'_4 \quad \begin{array}{c|c|c} \alpha'_4 & 1 & x \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline x & 0 & -\frac{3}{64} \end{array}$$

を得る .

Note このとき , $\alpha''_t = ((\alpha_t * (1 - tf)) * (1 - t^2 g)) = \alpha_t * ((1 - tf) \circ (1 - t^2 g))$ である . 興味あるのは

$$((1 - tf) \circ (1 - t^2 g))(x) = (1 - \frac{t^2}{8})x - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{16}$$

である .

Step 5 とにかく , この操作を (無限回続けて) α_t と α の同値を与える
 $f_t = (1 - tf) \circ (1 - t^2 g) \circ \cdots$ を得る :

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_t & \longrightarrow & \alpha'_t & \longrightarrow & \alpha''_t & \cdots & \longrightarrow & \alpha \\ & & 1 - tf & & 1 - t^2 g & & \cdots & \end{array}$$

Pless Power Moments
and
2-weight Projective Codes

山口大学経済学部

柏木 芳美

1 はじめに

元の符号と双対符号の重さ分布の関係式としては, MacWilliams identity というものが非常によく知られていて, サマーセミナーでも 2006 年に紹介した. ここでは, 同様の関係式である Pless power moments と呼ばれるものの 2-weight projective 符号 への 1 つの応用を紹介する. 「Are 2-Weight Projective Cyclic Codes Irreducible?」 (J. Wolfmann, IEEE Trans. Inf. Theory, vol.51, pp.733–737, 2005) の前半部分の紹介でもある.

私自身 Pless power moments は聞いていたのだが, まだ応用したことがなかったので一度経験したかったわけである.

2 諸定義

- q を素数巾, $\mathbb{F}_q$ を q 元体, n を自然数とする. $\mathbb{F}_q^n$ の部分空間を 符号 (code) といい, n をその符号の 長さ という. 符号の長さが n で次元が k のとき, $[n, k]$ 符号 と呼ばれる. 以下, C は常に長さ n の符号を表すこととする.

- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}_q^n$ に対し,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

により内積 $\cdot$ を定める.

$$C^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ for } \mathbf{u} \in C\}$$

を C の 双対符号 (dual code) という. C が $[n, k]$ 符号なら $C^\perp$ は $[n, n - k]$ 符号である.

- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$ とする.

$$\text{wt}(\mathbf{x}) = \#\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq 0\}$$

を $\mathbf{x}$ の 重さ(weight) という. 重さは $0, 1, \dots, n$ のいずれかの整数である.

$$\min\{\text{wt}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in C \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

を C の 最小重さ という. 最小重さは大きいほど符号の誤り訂正能力が高い. 符号理論で非常に重要な概念である.

N を自然数とし, $C \neq \{\mathbf{0}\}$ とする.

$$N = \#\{\text{wt}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in C \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

のとき, C を N -weight 符号 という.

- C を N -weight 符号とし,

$$w_1, w_2, \dots, w_N$$

を, C の元の 0 と異なる重さの全体とする.

$1 \leq i \leq N$ に対して

$$A_i = \#\{\mathbf{u} \in C : \text{wt}(\mathbf{u}) = w_i\}$$

とおき, $0 \leq j \leq n$ に対して

$$B_j = \#\{\mathbf{v} \in C^\perp : \text{wt}(\mathbf{v}) = j\}$$

とおく.

B_j の定義は標準的だが, A_i の定義は必ずしも標準的ではない (w_i の代わりに i を用いているものが多い) ので注意すること.

尚, $N = 1$ のときは, w_1 を w と書くことにする.

- $B_1 = B_2 = 0$ のとき, C を projective 符号 という. それほど例外的な符号ではない.

3 Pless Power Moments

Pless power moments と呼ばれる次の結果が知られている ([5, Pless]).

命題 1. C を N -weight $[n, k]$ 符号とし, w_i, A_i, B_j は先に定義したとおりとする. このとき, 次が成り立つ.

$$(1) \sum_{i=1}^N A_i = q^k - 1.$$

$$(2) \sum_{i=1}^N w_i A_i = \{n(q-1) - B_1\} q^{k-1}.$$

$$(3) \sum_{i=1}^N w_i^2 A_i = [n(q-1)\{n(q-1)+1\} - B_1\{q+2(n-1)(q-1)\} + 2B_2] q^{k-2}.$$

元々の Pless power moments は, B_j を用いて

$$\sum_{i=1}^N w_i^r A_i \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

を表したものである. ここでは, 最初の 3 つを与えた.

(1) に関しては, $\sum_{i=1}^N A_i$ に零ベクトルの 1 個を付け加えると C の元の個数となるが, $\dim C = k$ なので, その個数は q^k となる. 従って, 成り立つことが分かる.

4 1-weight Projective 符号

次の結果はよく知られている．この命題の符号は projective simplex 符号と呼ばれる．

命題 2. C を次元が k で長さが $n = \frac{q^k - 1}{q - 1}$ の projective 符号とする．このとき、 C は 1-weight 符号 で唯 1 つの 0 と異なる重さは q^{k-1} である．

1-weight 符号を考えるときは、次の命題が鍵となる．

命題 3. C を $[n, k]$ 符号とする． C が 1-weight 符号で $B_1 = 0$ ならば、

$$n = \lambda \frac{q^k - 1}{q - 1}, \quad w = \lambda q^{k-1}, \quad B_2 = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}(q^k - 1)$$

となる自然数 λ が存在する．

証明. 命題 1(1) より $A_1 = q^k - 1$ ．よって、 $B_1 = 0$ なので、命題 1(2) より $w(q^k - 1) = wA_1 = n(q - 1)q^{k-1}$ ． q^{k-1} と $q^k - 1$ は互いに素なので、 q^{k-1} は w を割る．従って、 $w = \lambda q^{k-1}$ となる自然数 λ が存在する．従って、 $\lambda q^{k-1}(q^k - 1) = w(q^k - 1) = n(q - 1)q^{k-1}$ より、 $n = \lambda \frac{q^k - 1}{q - 1}$ となる．命題 1(3) に、これらの値を代入すると、

$$\lambda^2 q^{2(k-1)}(q^k - 1) = [\lambda(q^k - 1)\{\lambda(q^k - 1) + 1\} + 2B_2]q^{k-2}$$

となる．よって、

$$\lambda^2 q^k(q^k - 1) = \lambda^2(q^{2k} - 2q^k + 1) + \lambda(q^k - 1) + 2B_2$$

より

$$2B_2 = \lambda^2(q^k - 1) - \lambda(q^k - 1) = \lambda(\lambda - 1)(q^k - 1)$$

が得られる. □

系 4. C を $[n, k]$ 符号とする. C が 1-weight projective 符号ならば,

$$n = \frac{q^k - 1}{q - 1}, \quad w = q^{k-1}$$

となる.

証明. $B_2 = 0$ なので, 命題 3 の B_2 より $\lambda = 1$ となる. 従って, 命題 3 より結論が言える. □

5 2-weight Projective 符号

命題 5. C を $[n, k]$ 符号とする. C が 2-weight projective 符号ならば次が成り立つ.

$$n^2(q - 1) - \{q(w_1 + w_2) - 1\}n + \frac{(q^k - 1)w_1w_2}{(q - 1)q^{k-2}} = 0, \quad (1)$$

$$A_1 = \frac{(q^k - 1)w_2 - n(q - 1)q^{k-1}}{w_2 - w_1},$$

$$A_2 = \frac{n(q - 1)q^{k-1} - (q^k - 1)w_1}{w_2 - w_1}.$$

証明. C は 2-weight で $B_1 = B_2 = 0$ なので, 命題 1 は

$$A_1 + A_2 = q^k - 1, \quad (2)$$

$$w_1 A_1 + w_2 A_2 = n(q-1)q^{k-1}, \quad (3)$$

$$w_1^2 A_1 + w_2^2 A_2 = n(q-1)\{n(q-1) + 1\}q^{k-2} \quad (4)$$

となる. ここで, 整数 a_0, a_1 を

$$a_0 = w_1 w_2, \quad a_1 = -(w_1 + w_2)$$

により定めると

$$(x - w_1)(x - w_2) = a_0 + a_1 x + x^2 \quad (5)$$

となる. ただし, x は変数. $a_0(2) + a_1(3) + (4)$ を計算すると

$$\begin{aligned} & a_0(A_1 + A_2) + a_1(w_1 A_1 + w_2 A_2) + w_1^2 A_1 + w_2^2 A_2 \\ &= A_1(a_0 + a_1 w_1 + w_1^2) + A_2(a_0 + a_1 w_2 + w_2^2) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= a_0(q^k - 1) + a_1 n(q-1)q^{k-1} + n(q-1)\{n(q-1) + 1\}q^{k-2} \\ &= n^2(q-1)^2 q^{k-2} + (a_1 q + 1)n(q-1)q^{k-2} + a_0(q^k - 1) \\ &= \left[n^2(q-1) - \{q(w_1 + w_2) - 1\}n + \frac{(q^k - 1)w_1 w_2}{(q-1)q^{k-2}} \right] (q-1)q^{k-2} \end{aligned} \quad (7)$$

式(5)より式(6)は0となる. 従って, 式(7)より式(1)が示される. $\square$

命題 5 を使うと, 次のちょっと面白い結果が得られる.

命題 6. C を 2-weight projective 符号とし, D を C の部分符号 (部分空間) で 2-weight projective とする. このとき, $D = C$ となる.

証明. $\dim C = r$, $\dim D = s$ とする. 命題 5 の式 (1) を考える. D は C の部分符号なので, D に対しても重さは w_1, w_2 となる. 従って, $n^2(q-1) - \{q(w_1 + w_2) - 1\}n$ は C に対しても D に対しても同じである. よって,

$$q^2 - \frac{1}{q^{r-2}} = \frac{q^r - 1}{q^{r-2}} = \frac{q^s - 1}{q^{s-2}} = q^2 - \frac{1}{q^{s-2}}$$

となる. 従って, $r = s$ なので $C = D$ となる. $\square$

参考として, 2-weight projective 符号の重さに関しては次が知られている ([1]).

命題 7. p を素数とし, q が p の巾とする. C が 2-weight projective 符号ならば, C の元の 0 と異なる重さは

$$p^s u \quad \text{あるいは} \quad p^s(u+1)$$

の形である. ただし, s は 0 以上の整数で u は自然数である.

6 補足

6.1 元の Pless Power Moments

$0 \leq i \leq n$ に対して

$$\tilde{A}_i = \#\{\mathbf{u} \in C : \text{wt}(\mathbf{u}) = i\}$$

とおく. $1 \leq i \leq N$ ならば,

$$A_i = \tilde{A}_{w_i}$$

となっている. 本来の Pless power moments は次の形をする ([2] あるいは [5]).

命題 8. C を $[n, k]$ 符号とし, r を 0 以上の整数としたとき, 次が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^n i^r \tilde{A}_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i B_i \left\{ \sum_{\nu=0}^r \nu! S(r, \nu) q^{k-\nu} (q-1)^{\nu-i} \binom{n-j}{n-\nu} \right\},$$

$$\sum_{i=0}^n (n-i)^r \tilde{A}_i = \sum_{i=0}^n B_i \left\{ \sum_{\nu=0}^r \nu! S(r, \nu) q^{k-\nu} \binom{n-j}{n-\nu} \right\}.$$

ここで,

$$S(r, \nu) = \frac{1}{\nu!} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \binom{\nu}{j} j^r$$

は第 2 種の Stirling 数と呼ばれる.

6.2 MacWilliams Identity

x, y を変数として

$$W_C(x, y) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i x^{n-i} y^i$$

とおく. サマーセミナーでも紹介したことがあるが ([3]), 次の結果はよく知られている ([4] あるいは [2]).

命題 9. C を符号としたとき, 次が成り立つ.

$$W_{C^\perp}(x, y) = \frac{1}{|C|} W_C(x+y, x-y).$$

参考文献

- [1] P. Delsarte, Weights of linear codes and strongly regular normed spaces, *Discr. Math.*, vol.3, pp.47–64, 1972.
- [2] W. C. Huffman and V. Pless, *Fundamentals of Error-Correcting Codes*, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [3] Y. Kashiwagi, Proof of the MacWilliams Identity, *Proc. 22nd Summer Seminar on Lie Alg. Related Topics*, pp.36–46, 2006.
- [4] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [5] V. Pless, Power moment identities on weight distributions in error-correcting codes, *Inf. Contr.*, vol.6, pp.147–152, 1962.
- [6] J. Wolfmann, Are 2-weight projective cyclic codes irreducible? *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.51, pp.733–737.

新種の多項式について

秋田工業高等専門学校

吉井 洋二

§1 数の拡張

Real numbers $\mathbb{R}$ (Greek Math — 19C, Bolzano, Cauchy, Abel, etc.)

Complex numbers $\mathbb{C}$ (16C, Cardano, Tartaglia, 18C, Euler, 1799, Gauss)

Hamilton numbers $\mathbb{H}$ (1843, Hamilton)

Cayley numbers $\mathbb{O}$ (1844, Cayley-Graves)

これらは **composition 代数**、即ち

$$N(xy) = N(x)N(y)$$

を満たす非退化 2 次形式 N をもつ代数である。1898 年、Hurwitz は composition 代数の次元は 1, 2, 4, 8 に限ることを示した。composition 代数は交代則 (alternative law)

$$x(xy) = x^2y \quad \text{and} \quad (yx)x = yx^2$$

を満たす。以来、**交代代数** (alternative algebra) の一般論が研究される。

ジョルダン代数 (1932, Jordan) とは、ジョルダンの等式

$$x^2(xy) = x(x^2y)$$

を満たす**可換**代数である。たとえば n 次エルミート行列全体 $H_n(\mathbb{C})$ は、行列の積について閉じてないが、新しい積を

$$x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$$

と定義すればジョルダン代数となる。また、 $n = 3$ の 9 次元ジョルダン代数 $H_3(\mathbb{C})$ を含む、Cayley 数 $\mathbb{O}$ を係数とする 3 次エルミート行列全体

$$\mathbb{A} = H_3(\mathbb{O}) \quad (1934, \text{Jordan, von Neumann, Wigner})$$

は、27次元の単純ジョルダン代数となり、**例外ジョルダン代数**（または **Albert 代数**）として Lie Theory や数理物理学等に多大な影響を与えている。

1978 年 Allison は、これらをさらに発展させて **structurable 代数**を定義した。
これは、交代代数やジョルダン代数を含み、さらに

$$\begin{aligned} & \mathbb{H} \otimes \mathbb{O} \quad \text{や} \quad \mathbb{O} \otimes \mathbb{O} \quad \text{あるいは} \\ & \mathbb{O}' = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\sqrt{j} \quad (\text{quartic octonion}) \quad \text{や} \\ & \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{A} \\ \mathbb{A} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad (1963, 56\text{-dimensional split Brown algebra}) \end{aligned}$$

（これらはジョルダン代数でも交代代数でもない）などを含むクラスである。Allison は、標数 0 の有限次元単純リー環を structurable 代数を使って統一的に考察した。

§2 Hamilton 多項式

2 変数の多項式環 $\mathbb{C}[t_1, t_2]$ を少し twist した環、即ち、 $t_2 t_1 = t_1 t_2$ の代わりに、

$$t_2 t_1 = -t_1 t_2$$

なる関係を入れた結合代数を

$$\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$$

で表し、**Hamilton 多項式環**と呼ぶ。 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ の中心（任意の元と可換な元からなる部分代数）は t_1^2 と t_2^2 を変数とする通常多項式環

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2]$$

であり、 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ は Z 上の quaternion 代数である。面白い性質として、

$$(t_1 + t_2)^2 = t_1^2 + t_2^2$$

がある。

さらに、通常多項式環 $\mathbb{C}[z_3, \dots, z_n]$ ($n \geq 3$) とのテンソル積

$$\mathbb{C}_h[t_1, t_2, z_3, \dots, z_n] := \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z_3, \dots, z_n]$$

を n 変数の **Hamilton 多項式環**と呼ぶ。また、**2 重 Hamilton 多項式環**

$$\mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4] := \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_h[t_3, t_4]$$

そして **3 重 Hamilton 多項式環**

$$\mathbb{C}_{3h}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6] := \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_h[t_3, t_4] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_h[t_5, t_6]$$

なども重要となる。

§3 Cayley-Dickson process

E を involution $-$ をもつ代数とする。ただし、involution とは位数 2 の anti-automorphism のことである。まず、 $0 \neq \bar{v} \in E$ と、 E の形式的コピー Ev (1 次元自由加群) を用意する。このとき、

$$(E, -) := E \oplus Ev$$

に、

$$(a + bv)(c + dv) = ac + \bar{d} \bar{b} + (da + b\bar{c})v \quad (a, b, c, d \in E) \quad (1)$$

なる積を与えた代数を、 $E = (E, -)$ から構成された、構造定数 $\bar{v}$ の **Cayley-Dickson 代数** と呼ぶ。特に、

$$v^2 =$$

に注意しよう。

(注) 通常 Cayley-Dickson 代数は、 $\bar{v}$ を E の基礎体から取るが、 E から取っても代数が構成できる。

例 1 E を Hamilton の 4 元数体

$$E = \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}ij,$$

$-$ を通常の共役作用素、 $\bar{v} = 1$ とすれば、 $(\mathbb{H}, 1)$ は Cayley number $\mathbb{O}$ となる。もっと身近な例は、 $\mathbb{R}$ の恒等変換を involution にとれば、 $(\mathbb{R}, 1) = \mathbb{C}$ であり、 $\mathbb{C}$ の通常の共役を involution にとれば、 $(\mathbb{C}, 1) = \mathbb{H}$ となる。また、 $(\mathbb{C}, 1)$ は 2 次行列全体 $M_2(\mathbb{R})$ に同型となる。

あまり知られていない例として、 $\mathbb{H}$ の involution $-$ を

$$\bar{i} = -i \quad \text{and} \quad \bar{j} = j$$

で定義し、 $\bar{v} = j$ とすれば、 $(\mathbb{H}, j)$ は 8 次元の代数となる。これを **quartic octonion** と呼び、 $\mathbb{O}'$ で表すことにする。さらに、

$$v := \sqrt{j}$$

と書けば、

$$\mathbb{O}' = (\mathbb{H}, j) = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\sqrt{j}$$

となる。また、(1) をよく見れば、

$$(i\sqrt{j})\sqrt{j} = ji = -ij \quad \text{同様に} \quad \sqrt{j}(\sqrt{j}i) = -ji$$

が成り立つので、 $\mathbb{O}'$ は交代代数ではない。それでも

$$\sqrt{j}i = -i\sqrt{j}, \quad \text{や} \quad i(i\sqrt{j}) = -\sqrt{j} \quad \text{そして} \quad (\sqrt{j}i)i = -\sqrt{j}$$

は成り立つので、 $\mathbb{O}$ に似ている。また、 $\mathbb{O}'$ は巾結合法則 (power associative law) を満たさない。たとえば

$$(i + \sqrt{j})(i + \sqrt{j})^2 \neq (i + \sqrt{j})^2(i + \sqrt{j})$$

である。Allison により $\mathbb{O}'$ は**単純** structurable 代数であることが示された。

§4 Cayley 多項式

まず、 n 変数の Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2, z_3, \dots, z_n]$ において、

$$\bar{t}_1 = t_1, \quad \bar{t}_2 = t_2, \quad \bar{z}_i = z_i \quad (i = 3, \dots, n)$$

で定義される involution を**標準 involution** と呼ぶ。

3 変数の Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2, z]$ とこの標準 involution $-$ に対して、 z を構造定数とする Cayley-Dickson 代数

$$\mathbb{C}_h[t_1, t_2, z] \rightarrow \mathbb{C}_h[t_1, t_2, z]v$$

を考える。このとき、 $v^2 = z$ となるので、

$$v := t_3 \quad \text{とおけば} \quad z = t_3^2$$

となる。この Cayley-Dickson 代数を $\mathbb{C}_c[t_1, t_2, t_3]$ で表し、**Cayley 多項式環**と呼ぶ ([8] 参照)。基本関係式として

$$t_2 t_1 = t_1 t_2, \quad t_3 t_1 = t_1 t_3, \quad t_3 t_2 = t_2 t_3, \quad (t_1 t_2) t_3 = t_1 (t_2 t_3)$$

を選ぶことができる ([9] 参照)。Cayley 多項式環の中心 (任意の元と可換かつ結合的な元全体) は、通常の多項式環

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2]$$

であり、Cayley 多項式環は Z 上の octonion 代数となる。興味深い等式として、

$$(t_1 + t_2 + t_3)^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$

がある。

§5 エルミート型ジョルダン多項式

一般に、代数 A があれば、その**プラス代数** $A^+ = (A, +)$ を

$$x + y = \frac{1}{2}(xy + yx) \quad (x, y \in A)$$

によって定義できる。また、 A が involution を持てば、 A^+ の部分代数

$$H(A,) = \{x \in A \mid x = x\}$$

が興味深い存在となる。特に A が交代代数ならば A^+ はジョルダン代数になる。(従って A が結合代数ならば A^+ はジョルダン代数である。)

ジョルダン代数 A^+ やその部分代数 $H(A,)$ は**エルミート型ジョルダン代数**と呼ばれる。さらに、 A が上で紹介したような多項式環の場合は、**エルミート型ジョルダン多項式環**と呼ぶ ([3], [7] 参照)。

例 2 $A_1 = \mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ (Hamilton 多項式環) とし、 $\bar{}$ を main involution, 即ち

$$t_1 = t_1, \quad t_2 = t_2$$

で定義される involution とすれば、 $J_1 := H(A_1,)$ はエルミート型ジョルダン多項式環の例となる。 J_1 の中心 (任意の元と結合的な元全体) は

$$Z_1 := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2]$$

となり、 J_1 は Z_1 上 3 次元のジョルダン代数で、その基底として $\{1, t_1, t_2\}$ が取れる。

例 3 $A_2 = \mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4] = \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_h[t_3, t_4]$ (2 重 Hamilton 多項式環) とし、 $\bar{}$ を標準 involution のテンソル積、即ち

$$\bar{t}_1 = t_1, \quad \bar{t}_2 = t_2, \quad \bar{t}_3 = t_3, \quad \bar{t}_4 = t_4$$

とすれば、 $J_2 := H(A_2, \bar{})$ はエルミート型ジョルダン多項式環の例となる。 J_2 の中心は

$$Z_2 := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2]$$

となり、 J_2 は Z_2 上 10 次元のジョルダン代数で、その基底として

$$B := \{1, t_1 t_3, t_1 t_4, t_1 t_3 t_4, t_2 t_3, t_2 t_4, t_2 t_3 t_4, t_1 t_2 t_3, t_1 t_2 t_4, t_1 t_2 t_3 t_4\}$$

が取れる。(注) $10 = 1 + {}_2C_2 = 3^2$.

§6 Albert 多項式

$\omega \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 3 乗根とする。Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ は関係式 $t_2 t_2 = t_1 t_2$ で定義されたが、今度は、

$$t_2 t_2 = \omega t_1 t_2$$

で定義された twisted 多項式環を考え、これを $\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2]$ で表すことにする。 $\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2]$ の中心は、多項式環

$$Z_3 := \mathbb{C}[t_1^3, t_2^3]$$

となり、 $\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2]$ は Z_3 上 9 次元の結合代数である。ここでは

$$(t_1 + t_2)^3 = t_1^3 + t_2^3$$

が成立する。

一般に、**1st Tits construction** と呼ばれる、ある種 (central simple) の 9 次元結合代数 A から、27 次元例外単純ジョルダン代数 (Albert 代数) を構成する方法がある。Cayley-Dickson 代数は doubling process であったが、これは tripling process となる。Cayley-Dickson 代数同様、構造定数 α によって特徴付けられるので、 (A, α) で表す (但し α は A の中心から取ってよい)。積の規則は少し複雑なので省略するが、

$$(A, \alpha) = A \quad Av \quad Av^2 \quad (2)$$

なる分解があり、

$$v^3 =$$

なる関係がある。

例 4 9 次元結合代数 $A = M_3(\mathbb{R})$ において、 $\alpha = 1$ とすれば、1st Tits construction (A, α) は 27 次元例外ジョルダン代数 $H_3(\mathbb{O}_z)$ になる。但し、 $\mathbb{O}_z$ は Zorn's vector-matrix algebra (split octonion) である。

(注) 実は $\alpha \in \mathbb{R}$ が 0 でない限り、 $(A, \alpha) = H_3(\mathbb{O}_z)$ となることが証明できる。従って、「1st Tits construction によって $H_3(\mathbb{O})$ を構成することはできない」 ([4] 参照)。

さて、結合代数

$$\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, z] = \mathbb{C}_\omega[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z]$$

の中心は

$$Z := Z_3 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[t_1^3, t_2^3, z]$$

であり、 $\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, z]$ は Z 上 9 次元結合代数となる。そこで、構造定数 $z \in Z$ に対して 1st Tits construction (2) を適用させ、さらに、

$$t_3 := v \quad \text{とおけば} \quad t_3^2 = v^2 \quad \text{そして} \quad t_3^3 = z$$

となる。この新しい多項式環を $\mathbb{C}_a[t_1, t_2, t_3]$ で表し、**Albert 多項式環** と呼ぶ ([5], [6] 参照)。従って Albert 多項式環には

$$\mathbb{C}_a[t_1, t_2, t_3] = \mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, t_3^3] \quad \mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, t_3^3]t_3 \quad \mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, t_3^3]t_3^2$$

なる分解がある。Albert 多項式環の中心は

$$Z := \mathbb{C}[t_1^3, t_2^3, t_3^3]$$

となり、 $\mathbb{C}_a[t_1, t_2, t_3]$ は Z 上の Albert 代数となる。ここでの興味深い等式は、

$$t_1(t_1 t_2) = \frac{1}{2} t_1^2 t_2 \quad \text{や} \quad t_1(t_2 t_3) = \omega(t_1 t_2) t_3$$

そして

$$(t_1 + t_2 + t_3)^3 = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3$$

などである。

§7 Structurable 多項式環

$\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ や $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$ はもはや交代代数ではないが、単純 structurable 代数となる。これと平行して、Hamilton 多項式環と Cayley 多項式環とのテンソル積あるいは Cayley 多項式環同士のテンソル積、即ち

$$\mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes \mathbb{C}_c[t_3, t_4, t_5] \quad \text{あるいは} \quad \mathbb{C}_c[t_1, t_2, t_3] \otimes \mathbb{C}_c[t_3, t_4, t_5]$$

が興味深い structurable 多項式環の例となる。

また、Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ において、

$$\bar{t}_1 = -t_1 \quad \text{そして} \quad \bar{t}_2 = t_2$$

で定まる involution をとり、構造定数 t_2 の Cayley-Dickson 代数

$$(\mathbb{C}_h[t_1, t_2], t_2)$$

を **quartic Cayley 多項式環** と呼ぶ。さらに

$$\sqrt{t_2} := v$$

と置けば

$$(\mathbb{C}_h[t_1, t_2], t_2) = \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \oplus \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \sqrt{t_2}$$

と書けるので、quartic Cayley 多項式環を $\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ で表すことにする。 $\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ の中心 (任意の元と可換かつ結合的な元全体) は

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2]$$

となり、 $\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ は Z 上の quartic octonion 代数 (8 次元) となる。ここでも、

$$(t_1 \sqrt{t_2}) \sqrt{t_2} = t_1 t_2 \quad \text{そして} \quad \sqrt{t_2} (\sqrt{t_2} t_1) = t_2 t_1$$

となるので交代代数ではないが、

$$\sqrt{t_2}t_1 = t_1\sqrt{t_2}, \quad \text{や} \quad t_1(t_1\sqrt{t_2}) = t_1^2\sqrt{t_2} \quad \text{そして} \quad (\sqrt{t_2}t_1)t_1 = \sqrt{t_2}t_1^2$$

は成り立つ。また、 $\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ は非中結合的 (not power associative) である。たとえば、

$$(t_1 + \sqrt{t_2})(t_1 + \sqrt{t_2})^2 \neq (t_1 + \sqrt{t_2})^2(t_1 + \sqrt{t_2})$$

である。この $\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ も興味深い structurable 多項式環となる。

§8 Allison-Faulkner process

K を可換結合代数、 J を K 上の可換代数とする (たとえば Jordan 代数)。 $\gamma : J \rightarrow J$ を位数 2 の線形変換とする。1984 年、Allison と Faulkner は新しい Cayley-Dickson 代数を考案した。これは

$$(J, \gamma) = J \oplus Jv$$

に対して積を

$$(a + bs)(c + ds) = (ac + (bd^\theta)^\theta) + (a^\theta d + (b^\theta c^\theta)^\theta)s$$

と定義した代数である。また、

$$(a + bs)^\theta = a^\theta + b^\theta s$$

によって (J, γ) の位数 2 の線形変換 γ も定義できるので繰り返すことも出来る。Allison と Faulkner は、 J がある種のジョルダン代数なら (J, γ) は単純 structurable 代数になることを証明した。

例 5 例 3 で考察したように、エルミート型ジョルダン多項式環 $H(\mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4], \gamma)$ は、中心 $\mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2]$ 上 B を基底とする 10 次元ジョルダン代数であった。この 2 重 Hamilton 多項式環に通常の変数 z を加えた $\mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4, z]$ に対しても、中心は

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, z]$$

であり、 Z 上の基底は依然 B である。即ち、

$$J_{10} := H(\mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4, z], \gamma)$$

は Z 上 10 次元のエルミート型ジョルダン多項式環である。ここで、 $\gamma : J_{10} \rightarrow J_{10}$ を $t \in B \setminus \{1\}$ に対して、

$$\gamma(t) = t^\theta \quad \text{そして} \quad \gamma(1) = 1$$

で定義する。そして $v = z$ として Cayley-Dickson 代数

$$(J_{10}, z) = J_{10} \oplus J_{10}v$$

を構成する。前と同様、

$$t_5 := v \quad \text{とすれば} \quad t_5^2 = z$$

となるから、 (J_{10}, z) は t_1 から t_5 を変数とする多項式環と捉えることが出来る。この中心は J_{10} の中心と同じで

$$Z = \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, t_5^2]$$

となる。ここで、通常が多項式環 $\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5]$ は Z 上 $2^5 = 32$ 次元だが、 (J_{10}, z) は Z 上 20 次元である。この J_{10} も興味深い structurable 多項式環となる。

最後に、3 重 Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_{3h}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, z]$ とその標準 involution $-$ から同様に構成した、中心

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, t_5^2, t_6^2, z]$$

上 28 次元のエルミート型ジョルダン多項式環

$$J_{28} := H(\mathbb{C}_{3h}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, z], -)$$

を考える ($28 = 1 + {}_3C_2 = 3^2$)。そして J_{28} 上に $-$ を J_{10} と同じように定義して、Allison-Faulkner 代数

$$\mathbb{C}_b[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7] := (J_{28}, z) = J_{28} + J_{28}t_7$$

($t_7^2 = z$) を構成すれば、これも重要な structurable 多項式環となる。中心は

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, t_5^2, t_6^2, t_7^2]$$

であり、 $\mathbb{C}_b[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7]$ は、 Z 上 $28 + 28 = 56$ 次元となる。

(注) 通常が多項式環 $\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7]$ の場合は、 Z 上 $2^7 = 128$ 次元であるから、たくさんの monomials が消えている。

詳しい説明は略すが、Allison の理論により、中心 Z の商体を $\bar{Z}$ とすれば、 $\mathbb{C}_b[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7]$ の central closure

$$\mathbb{C}_b[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7] \otimes_Z \bar{Z}$$

は $\bar{Z}$ 上 56 次元 Brown 代数となる。従ってこの structurable 多項式環 $\mathbb{C}_b[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7]$ を **Brown 多項式環**と呼んでもよい。

ここで紹介した多項式環以外にも、Lie Theory で重要となるものがたくさんある。興味のある方は、[1] および [2] を参照して欲しい。

参考文献

- [1] B. Allison, J. Faulkner, Y. Yoshii, *Structurable tori*, Comm. Algebra, **36**(6) (2008), 2265–2332.
- [2] B. Allison, Y. Yoshii, *Structurable tori and extended affine Lie algebras of type BC_1* , Pure Appl. Algebra, no. 2-3, **184** (2003), 105–138.
- [3] G. Benkart, Y. Yoshii, *Lie G -tori of symplectic type*, Quar. J. Math Vol.57, no.4 (2006), 425–448.
- [4] H. Petersson, *Real Albert algebras and the Tits constructions*, preprint.
- [5] Y. Yoshii, *Jordan tori*, Math. Reports Acad. Sci. Canada, **18**(4) (1996), 153–158.
- [6] Y. Yoshii, *Coordinate algebras of extended affine Lie algebras of type A_1* , J. Algebra, **234** (2000), 128–168.
- [7] Y. Yoshii, *Classification of quantum tori with involution*, Canad. Math. Bull., **45**(4) (2002), 711–731.
- [8] Y. Yoshii, *Classification of division $\mathbb{Z}^n$ -graded alternative algebras*, J. Algebra, **256** (2002), 28–50.
- [9] Y. Yoshii, *Cayley polynomials*, Algebra and Logic, **47**(1) (2008), 32–41.

Some properties of factorized Lie algebras II

坂本隆則（福岡教育大学）・本多政宣（新潟薬科大学）

24 August 2012

Group G は2つの subgroups A, B によって $G = AB$ と表されているとき, G は A, B によって factorize されるという。1955 年に Itô [6] は

『 A, B が abelian のとき, G は metabelian である』

ことを証明した。これを次のように一般化した問題がある：

『 A, B が nilpotent のとき, G は soluble か？』

G が finite group のときは, Kegel [7] と Wielandt [11] によって肯定的に解決されたが, 一般の場合は, 次の問題

『 A, B が locally nilpotent のとき, G は locally soluble か？』

と共に未解決である。

そこで, 同様なことを Lie algebras で考えてみる。

定義 体 $\mathfrak{k}$ 上の Lie algebra L は2つの subalgebras A, B の和として表されている, i.e. $L = A + B$, とき L は A, B によって factorize されるという。

$L = A + B$ のとき, Itô の結果に対応する

『 A, B が abelian のとき, L は metabelian である』

は, 1976 年に Amayo [2] によって証明された。また, groups と同様に次の問題

『 A, B が nilpotent のとき, L は soluble か？』

も未解決である。ただし, L が finite-dimensional のときには, $\text{char } \mathfrak{k} = 0$ の場合

に Goto [4] が, $\text{char } \mathfrak{k} = p > 2$ の場合に Panyukov [8] が, 成り立つことを証明した。 $\text{char } \mathfrak{k} = 2$ の場合には Petravchuk [9] によって反例が与えられた。

さて, groups の場合と同様に次も未解決である：

(LNS) 『 A, B が locally nilpotent のとき, L は locally soluble か?』

我々は [5] において, (LNS) が成り立つためのある十分条件を求めた：

定理 A $\text{char } \mathfrak{k} \neq 2$, $L = A + B \in \mathbf{L}(\text{wser})\mathfrak{F}$ のとき, A, B が locally nilpotent ならば, L は locally soluble である。

また, Aldosray [1] は 1984 年に次の結果を示した：

『 $\text{char } \mathfrak{k} = 0$, $L = A + B \in \mathbf{L}(\triangleleft)\mathfrak{F}$ のとき, $H\text{asc}A, H\text{asc}B \Rightarrow H\text{asc}L$ 』

我々はこれを次のように一般化した：

定理 B $\text{char } \mathfrak{k} = 0$, $L = A + B \in \mathbf{L}(\text{ser})\mathfrak{F}$ のとき, $H\text{ser}A, H\text{ser}B \Rightarrow H\text{ser}L$.

系 C $\text{char } \mathfrak{k} = 0$, $L = A + B \in \mathbf{E}(\triangleleft)\mathfrak{F} \cap \mathbf{L}(\text{ser})\mathfrak{F}$ のとき, $H\text{asc}A, H\text{asc}B \Rightarrow H\text{asc}L$.

ここでは, [3] に従って, Factorized Lie algebras の基本的な性質について述べる。

補題 1 ([10, Lemma 1]) L を factorized Lie algebra by A and B とし, H を L の subalgebra とするとき, 次の (i) と (ii) は同値である：

- (i) $a + b \in H \ (a \in A, b \in B) \implies a, b \in H$
- (ii) $H = (A \cap H) + (B \cap H)$ and $A \cap B \leq H$

定義 補題 1 における条件 (i) 又は (ii) が成り立つとき, H を *factorized subalgebra of L* または *factorized in L* という。

注： $A \cap B$ は最小の factorized subalgebra of L である。

補題 2 ([10, Lemma 2]) $L = A + B$ のとき

- (1) $A \leq H$ または $B \leq H$ ならば, H は factorized in L である。
- (2) $A \cap B = 0$ のとき, $H \leq A$ または $H \leq B$ ならば, H は factorized in L である。

補題 3 ([10, Lemma 3]) L を factorized Lie algebra by A and B とするとき

(1) H_λ : factorized subalgebra of L ($\lambda \in \Lambda$)

$$\implies \cap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda : \text{factorized in } L$$

(2) H_λ : factorized ideal of L ($\lambda \in \Lambda$)

$$\implies \sum_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda : \text{factorized in } L$$

(3) $I \triangleleft L$, $I \leq H \leq L$ のとき

$$H/I : \text{factorized in } L/I \iff H : \text{factorized in } L$$

補題 4 ([10, Lemma 4]) L を factorized Lie algebra by A and B とするとき, H が factorized subalgebra of L ならば

$$H = (A + H) \cap (B + H)$$

定義 L を factorized Lie algebra by A and B とし, H を L の subalgebra とする。 H を含む全ての L の factorized subalgebras の集合を $\mathcal{F}$ とおくと

$$X(H) = \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$$

を *factorizer* of H in L という。補題 3 (1) より, $X(H)$ は H を含む L の最小の factorized subalgebra である。

命題 5 ([10, Proposition 5]) L を factorized Lie algebra by A and B とし, L の subalgebra K が A, B とそれぞれ permutable であるとき,

$$(1) \quad X(K) = (A + K) \cap (B + K)$$

$$(2) \quad \begin{aligned} X(K) &= A \cap (B + K) + K = B \cap (A + K) + K \\ &= A \cap (B + K) + B \cap (A + K) \end{aligned}$$

(3) $\dim K < +\infty$ ならば,

$$\dim(X(K)/A \cap B) < +\infty$$

命題 6 ([10, Proposition 6]) L を factorized Lie algebra by A and B とし, I を L の ideal とする。 $A^2 \leq I$, $B^2 \leq I$ のとき,

$$[X(I), L] \subset I$$

である。特に, $X(I)$ は L の ideal となる。

次に infinite-dimensional factorized Lie algebras の例を与える。

例 ([10, Example]) $\mathfrak{k}$ を field とし,

$\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ = the general linear Lie algebra of all $n \times n$ matrices over $\mathfrak{k}$,

f_{mn} = the natural embedding from $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ to $\mathfrak{gl}(m, \mathfrak{k})$ ($n \leq m$).

とする。そこで,

$$L = \varinjlim \mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k}) = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k}) \quad (\text{the direct limit of } \{\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k}), f_{mn}\}).$$

と定める。さらに,

$\mathfrak{sl}(n, \mathfrak{k})$ = the special linear Lie algebra of all $n \times n$ matrices
with trace zero over $\mathfrak{k}$,

$$S = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{sl}(n, \mathfrak{k}).$$

とおくと, $S \triangleleft L$ である。

(1) そこで,

$\mathfrak{ut}(n, \mathfrak{k})$ = the subalgebra of $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ of all upper triangular $n \times n$ matrices,

$\mathfrak{lt}(n, \mathfrak{k})$ = the subalgebra of $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ of all lower triangular $n \times n$ matrices.

とし,

$$A = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{ut}(n, \mathfrak{k}), \quad B = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{lt}(n, \mathfrak{k}).$$

とおく。このとき, 明らかに $L = A + B$ となる。ところが³

$$\begin{aligned} S \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in A + B, \\ \text{but } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\notin S, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin S, \end{aligned}$$

なので, S は factorized in $L = A + B$ でない。さらに

$$S = (A \cap S) + (B \cap S) \quad \text{but} \quad A \cap B \not\subseteq S.$$

である。命題5より

$$S < X(S) = A \cap (B + S) + S = B \cap (A + S) + S.$$

が成り立つ。

(2) 次に

$\mathfrak{uto}(n, \mathfrak{k})$ = the subalgebra of $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ of all upper triangular $n \times n$ matrices
(a_{ij}) with $a_{ii} = 0$ for any even integer i ,

$\mathfrak{lte}(n, \mathfrak{k})$ = the subalgebra of $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ of all lower triangular $n \times n$ matrices
(a_{ij}) with $a_{ii} = 0$ for any odd integer i .

とし,

$$A' = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{uto}(n, \mathfrak{k}), \quad B' = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{lte}(n, \mathfrak{k}).$$

とすると, 明らかに $L = A' + B'$, $A' \cap B' = 0$ となる。また (1) と同様に S は factorized in $L = A' + B'$ ではない。従って, 補題1より

$$S \supsetneq (A' \cap S) + (B' \cap S)$$

を得る。

最後に, A, B の有限条件 (極大条件, 極小条件) と L の有限条件の関係について述べる。次が key となる補題である。

補題7 ([10, Lemma 7]) $L = A + B$ とする。 H と K が $H \leq K$ なる L の ideals で, $A \cap H = A \cap K$, $B \cap (A + H) = B \cap (A + K)$ ならば, $H = K$ である。

定理8 ([10, Theorem 8]) L を factorized Lie algebra by A and B とする。

(1) Δ を relations $\leq, \triangleleft, \text{si}, \triangleleft^\alpha, \text{asc}$ のいずれかで, $A \Delta L$ とするとき,

$$\begin{aligned} A \in \text{Max-}\triangleleft \text{ (resp. Min-}\triangleleft), B \in \text{Max-}\Delta \text{ (resp. Min-}\Delta) \\ \implies L \in \text{Max-}\triangleleft \text{ (resp. Min-}\triangleleft) \end{aligned}$$

(2) $A \text{ ser } L \in \mathbf{L}\mathfrak{F}$ とする。

$$\begin{aligned} A \in \text{Max-}\triangleleft \text{ (resp. Min-}\triangleleft), B \in \text{Max-ser (resp. Min-ser)} \\ \implies L \in \text{Max-}\triangleleft \text{ (resp. Min-}\triangleleft) \end{aligned}$$

次の系は [3, Lemma 1.2.6] に対応する。

系9 ([10, Corollary 9]) L を factorized Lie algebra by A and B とするとき,

$$A, B \in \text{Max (resp. Min)} \implies L \in \text{Max}-\triangleleft \text{ (resp. Min}-\triangleleft)$$

参考文献

- [1] F.A.M.ALDOSRAY: On subideals of the join of permutable Lie algebras. Arch. Math. **43**, 322-327(1984).
- [2] R.K.AMAYO: Quasi-ideals of Lie algebras I. Proc. London Math. Soc.(3) **33**, 28-36(1976).
- [3] B.Amberg, S.Franciosi and F. de Giovanni: Products of Groups, Oxford, New York 1992.
- [4] M.GOTO: Note on a characterization of solvable Lie algebras. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I **26**, 1-2(1962).
- [5] M.Honda and T.Sakamoto: Lie algebras represented as a sum of two subalgebras, Math. J. Okayama Univ. **42**, 73-81(2000).
- [6] N.ITÔ: Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen. Math. Zeitschr. **63**, 401-404(1955).
- [7] O.H.KEGEL: Produkte nilpotenter Gruppen. Arch. Math. **12**, 90-93(1961).
- [8] V.V.PANYUKOV: On the solubility of Lie algebras of positive characteristic. Russ. Math. Surv. **45**, N 4, 181-182(1990).
- [9] A.P.PETRAVCHUK: Lie algebras decomposable as a sum of an abelian and a nilpotent subalgebra. Ukr. Math. J. **40**, N3, 331-334(1988).
- [10] T.Sakamoto and M.Honda: Some properties of factorized Lie algebras, Bulletin of Fukuoka University of Education **61**, 1-7 (2012).
- [11] H.WIELANDT: Über Produkte nilpotenten Gruppen. Illinois J. Math. **2**, 611-618(1958).

Weyl groupoid について

山根 宏之 (阪大情報)

1 Weyl groupoids

$\delta_{a,b}$ および $\delta(a,b)$ で Kronecker's delta を表わす。 $a, b \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ に対して $J_{a,b} := \{n \in \mathbb{N} | a \leq n \leq b\}$ とおく。

この論説では $N \in \mathbb{N}$ を固定する。 $I := J_{1,N}$ とおく。 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して Map_n^I を $J_{1,n}$ から I への写像全体のなす集合とする。 Map_0^I を 1 つの元 ϕ のみからなる集合とする。

$C = [c_{ij}]_{i,j \in I} \in M_N(\mathbb{Z})$ が generalized Cartan matrix であるとは次の (M1), (M2) をみたすときにいう。

$$(M1) \quad c_{ii} = 2 \quad (i \in I).$$

$$(M2) \quad c_{jk} \leq 0, \delta(c_{jk}, 0) = \delta(c_{kj}, 0) \quad (j, k \in I, j \neq k).$$

$\mathcal{A}$ を空でない集合とする。 各 $i \in I$ に対して写像 $\varsigma_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ が与えられているとする。 各 $a \in \mathcal{A}$, $i, j \in I$ に対して generalized Cartan matrix $C^a = [c_{ij}^a]_{i,j \in I}$ が与えられているとする。 データ

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{A}, (\varsigma_i)_{i \in I}, (C^a)_{a \in \mathcal{A}})$$

が Cartan scheme であるとは (C1), (C2) をみたすときにいう。

$$(C1) \quad \varsigma_i^2 = \text{id}_{\mathcal{A}} \quad (i \in I).$$

$$(C2) \quad c_{ij}^{\varsigma_i(a)} = c_{ij}^a \quad (i, j \in I).$$

以下この Section では $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{A}, (\varsigma_i)_{i \in I}, (C^a)_{a \in \mathcal{A}})$ を Cartan scheme とする。 各 $a \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{V}^a$ を $\{\alpha_i^a | i \in I\}$ を基底とする N 次元 $\mathbb{R}$ -線形空間とする。 線型同型写像 $s_i^a : \mathcal{V}^a \rightarrow \mathcal{V}^{\varsigma_i(a)}$ ($a \in \mathcal{A}, i \in I$) を

$$(1.1) \quad s_i^a(\alpha_j^a) = \alpha_j^{\varsigma_i(a)} - c_{ij}^a \alpha_i^{\varsigma_i(a)} (= \alpha_j^{\varsigma_i(a)} - c_{ij}^{\varsigma_i(a)} \alpha_i^{\varsigma_i(a)}) \quad (j \in I)$$

で定義する。 このとき

$$(1.2) \quad s_i^{\varsigma_i(a)} s_i^a = \text{id}_{\mathcal{V}^a} \quad (a \in \mathcal{A}, i \in I)$$

が成り立つ。各 $a \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, $f \in \text{Map}_n^I$ に対して

$$\begin{aligned} a_{f,0} &:= a, \quad 1^a s_{f,0} := \text{id}_{\mathcal{V}^a}, \\ a_{f,t} &:= \varsigma_{f(t)}(a_{f,t-1}), \quad 1^a s_{f,t} := 1^a s_{f,t-1} s_{f(t)}^{a_t} \quad (t \in J_{1,n}) \end{aligned}$$

とおく。

各 $a, b \in \mathcal{A}$ に対して

$$(1.3) \quad \mathcal{H}(a, b) := \{1^a s_{f,t} : \mathcal{V}^b \rightarrow \mathcal{V}^a \mid f \in \text{Map}_\infty^I, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_{f,t} = b\}$$

とおく。

Category $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ を $\text{Ob}(\mathcal{W}(\mathcal{C})) := \mathcal{A}$, $\text{Hom}_{\mathcal{W}(\mathcal{C})}(a, a') := \{a\} \times \mathcal{H}(a, a') \times \{a'\}$ および積を $(a, w, a')(a', w', a'') := (a, ww', a'')$ とすることにより定義する。 $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ を Cartan Scheme $\mathcal{C}$ の Weyl groupoid とよぶ。

各 $a \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{V}^a$ の部分集合 $R(a) \subset \mathcal{V}^a$ が与えられているとする。 $R^+(a) := R(a) \cap (\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^a)$ とおく。データ

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C}, (R(a))_{a \in \mathcal{A}})$$

が *generalized root system of type $\mathcal{C}$* であるとは以下の (R1)-(R5) をみたすときにいう。

- (R1) $R(a) = R^+(a) \cup -R^+(a) \quad (a \in \mathcal{A}).$
- (R2) $R(a) \cap \mathbb{Z} \alpha_i^a = \{\alpha_i^a, -\alpha_i^a\} \quad (a \in \mathcal{A}, i \in I).$
- (R3) $s_i^a(R(a)) = R(\varsigma_i(a)) \quad (a \in \mathcal{A}, i \in I).$
- (R4) $\exists w \in \mathcal{H}(a, b), \forall i \in I, w(\alpha_i^b) = \alpha_i^a \Leftrightarrow a = b \quad (a, b \in \mathcal{A}).$
- (R5) $\mathcal{H}(a, b) \neq \emptyset \quad (a, b \in \mathcal{A}).$

generalized root system $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C}, (R(a))_{a \in \mathcal{A}})$ にたいして $\mathcal{W}(\mathcal{R}) := \mathcal{W}(\mathcal{C})$ とおく。 $\mathcal{W}(\mathcal{R})$ を $\mathcal{R}$ の Weyl groupoid とよぶ。

以下この section では $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C}, (R(a))_{a \in \mathcal{A}})$ を generalized root system of type $\mathcal{C}$ とする。

$$(1.4) \quad s_i^a(R^+(a) \setminus \{\alpha_i^a\}) = R^+(\varsigma_i(a)) \setminus \{\alpha_j^{\varsigma_i(a)}\}.$$

が成り立つ事に注意する。各 $a \in \mathcal{A}$, $i, j \in I$ に対して

$$m_{ij}^a := |R^+(a) \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^a \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j^a)| \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$$

とおく。

Lemma 1.1. $m_{ij}^a < \infty$ と仮定する。 $m := m_{ij}^a$ とおく。 $f \in \text{Map}_{2m}^I$ を $f(2k-1) := i$, $f(2k) := j$ ($k \in J_{1,m}$) により定義する。このとき以下の (R4)' が成り立つ

$$(R4)' \quad a_{f,2m} = a \text{ および } 1^a s_{f,2m} = \text{id}_{V^a}.$$

Proof. $i = j$ のときは明らか。 $i \neq j$ と仮定する。各 $k \in J_{1,m}$ に対して $\beta^{a_{f,k}} := 1^a s_{f,k-1}(\alpha_{f(k)}^{a_{f,k-1}})$ とおく。各 $k \in J_{0,m}$ に対して

$$Z_k^{a_{f,k}} := R^+(a_k) \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^{a_{f,k}} \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j^{a_{f,k}}), \quad Y_{f,k}^a := Z_0^a \cap -1^a s_{f,k}(Z_k^{a_{f,k}})$$

とおく。(1.1) と (1.4) により

$$(1.5) \quad |Z_k^{a_{f,k}}| = m \quad (k \in J_{0,m})$$

が成り立つ。各 $k \in J_{1,m}$ に対して

$$(*)_k \quad |Y_k^a| = k \text{ および } Y_k^a = \{ \beta_r^a \mid r \in J_{1,k} \}.$$

が成り立つ事を示す。(1.4) より $(*)_1$ が成り立つ。

$k \in J_{2,m}$ とする。 $(*)_{k-1}$ が成り立つと仮定する。(R3), (1.1) および (1.4) より

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & Z_0^a \cap (-1^a s_{f,k}(Z_k^{a_k} \setminus \{ \alpha_{f(k)}^{a_{f,k}} \})) \\ &= Z_0^a \cap (-1^a s_{f,k-1}(Z_{k-1}^{a_{f,k-1}} \setminus \{ \alpha_{f(k)}^{a_{f,k-1}} \})) \\ &= Y_{k-1}^a \setminus \{ -\beta_k^a \} \end{aligned}$$

が成り立つ。また

$$(1.7) \quad Z_0^a \cap \{ -1^a s_{f,k}(\alpha_{f(k)}^{a_{f,k}}) \} = Z_0^a \cap \{ \beta_k^a \}$$

が成り立つ。(1.6) および (1.7) より

$$(1.8) \quad \begin{aligned} Y_k^a &= Z_0^a \cap (-1^a s_{f,k}(Z_k^{a_k} \setminus \{ \alpha_{f(k)}^{a_{f,k}} \}) \cup \{ -1^a s_{f,k}(\alpha_{f(k)}^{a_k}) \}) \\ &= (Y_{k-1}^a \setminus \{ -\beta_k^a \}) \cup (Z_0^a \cap \{ \beta_k^a \}) \end{aligned}$$

および

$$(1.9) \quad (Y_{k-1}^a \setminus \{ -\beta_k^a \}) \cap (Z_0^a \cap \{ \beta_k^a \}) = \emptyset$$

が成り立つ。 $\beta_k^a \notin Z_0^a$ と仮定する。このとき $1^a s_{f,k-1}(\alpha_{f(k)}^{a_{f,k-1}}) = \beta_k^a \in -Z_0^a$ が成り立つ。一方 $1^a s_{f,k-1}(\alpha_{f(k-1)}^{a_{f,k-1}}) = -1^a s_{f,k-2}(\alpha_{f(k-1)}^{a_{f,k-2}}) = -\beta_{f,k-1}^a \in -Z_0^a$ が成り立つ。 $\{f(k-1), f(k)\} = \{i, j\}$ より $1^a s_{f,k-1}(Z_{k-1}^{a_{f,k-1}}) = -Z_0^a$ が成り立つ。ゆえに $Y_{k-1}^a = Z_0^a$ が成り立つ。これは $k-1 = |Y_{k-1}^a| < m$ となり矛盾である。従って $\beta_k^a \in Z_0^a$ が成り立つ。従って $-\beta_k^a \notin Z_0^a$ が成り立つ。ゆえに $-\beta_k^a \notin Y_{k-1}^a$ も成り立つ。(1.8) と (1.9) より $(*)_k$ が成り立つ。

(1.5) と $(*)_m$ より $1^a s_{f,m}(Z_m^{a_{f,m}}) = -Z_0^a$ が成り立つ。従って

$$1^a s_{f,m}(\{\alpha_i^{a_{f,m}}, \alpha_j^{a_{f,m}}\}) = \{-\alpha_i^a, -\alpha_j^a\}$$

が成り立つ。 $f' \in \text{Map}_m^I$ を $f'(y) := f(m+y)$ によって定義する。同様にして $1^{a_{f,m}} s_{f',m}(\{\alpha_i^{a_{f,2m}}, \alpha_j^{a_{f,2m}}\}) = \{-\alpha_i^{a_{f,m}}, -\alpha_j^{a_{f,m}}\}$ が成り立つ。従って $1^a s_{f,2m}(\{\alpha_i^{a_{f,2m}}, \alpha_j^{a_{f,2m}}\}) = \{\alpha_i^a, \alpha_j^a\}$ が成り立つ。各 $t \in J_{1,2m}$ に対して $\mathbb{R}$ -線型写像 $s_{f(t)}^{a_{f,t}} : \mathcal{V}^{a_{f,t}} \rightarrow \mathcal{V}^{a_{f,t-1}}$ を $\mathbb{R}\alpha_i^{a_{f,t}} \oplus \mathbb{R}\alpha_j^{a_{f,t}}$ に制限した $\mathbb{R}\alpha_i^{a_{f,t}} \oplus \mathbb{R}\alpha_j^{a_{f,t}}$ から $\mathbb{R}\alpha_i^{a_{f,t-1}} \oplus \mathbb{R}\alpha_j^{a_{f,t-1}}$ への $\mathbb{R}$ -線型写像の定義域の基底 $\{\alpha_i^{a_{f,t}}, \alpha_j^{a_{f,t}}\}$ と終域の基底 $\{\alpha_i^{a_{f,t-1}}, \alpha_j^{a_{f,t-1}}\}$ に関する 2×2 の表現行列の行列式は -1 である。ゆえに $1^a s_{f,2m}(\alpha_i^{a_{f,2m}}) = \alpha_i^a$ および $1^a s_{f,2m}(\alpha_j^{a_{f,2m}}) = \alpha_j^a$ が成り立つ。従って (1.1) より任意の $k \in I \setminus \{i, j\}$ に対して $1^a s_{f,2m}(\alpha_k^{a_{f,2m}}) \in \alpha_k^a + (\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i^a \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_j^a)$ が成り立つ。(R1) より任意の $k \in I$ に対して $1^a s_{f,2m}(\alpha_k^{a_{f,2m}}) = \alpha_k^a$ が成り立つ。(R1) より $a_{f,2m} = a$ が成り立つ。従って (R4)' が成り立つ。□

以下

$$\sigma_i^a := (\varsigma_i(a), s_i^a, a) \in \text{Hom}_{\mathcal{W}(\mathcal{R})}(\varsigma_i(a), a)$$

とおく。 $1^a \sigma_{f,t} := (a, 1^a s_{f,t}, a_{f,t}) \in \text{Hom}_{\mathcal{W}(\mathcal{R})}(a, a_{f,t})$ とおく。 $\omega \in \text{Hom}_{\mathcal{W}(\mathcal{R})}(a, a')$ にたいして

$$\ell(\omega) := \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists f \in \text{Map}_n^I, \omega = 1^a \sigma_{f,n}\}$$

とおく。 $i, j \in I$ に対して $f_{ij} \in \text{Map}_\infty^I$ を $f_{ij}(2t-1) := i, f_{ij}(2t) := i$ ($t \in \mathbb{N}$) によって定義する。

Theorem 1.2. (1) *Category* として $\mathcal{W}(\mathcal{R})$ は σ_i^a ($a \in \mathcal{A}, i \in I$) 生成元とし

$$(1.10) \quad \sigma_i^{\varsigma_i(a)} \sigma_i^a = 1^a \quad (a \in \mathcal{A}, i \in I)$$

および

$$(1.11) \quad 1^a \sigma_{f_{ij}, 2m_{ij}^a} = 1^a \quad (a \in \mathcal{A}, i, j \in I, i \neq j, m_{ij}^a < \infty)$$

を関係式によって定義される。

(3) $\omega = 1^a \sigma_{f, \ell(\omega)} = 1^a \sigma_{f', \ell(\omega)} \in \text{Hom}_{\mathcal{W}(\mathcal{R})}(a, a')$, $f, f' \in \text{Map}_{\ell(\omega)}^I$ とする。
このとき ω の被約表示 $1^a \sigma_{f, \ell(\omega)}$, $1^a \sigma_{f', \ell(\omega)}$ は関係式

$$(1.12) \quad 1^{a''} \sigma_{f_{ij}, m_{ij}^{a''}} = 1^{a''} \sigma_{f_{ij}, m_{ji}^{a''}} \quad (a'' \in \mathcal{A}, i, j \in I, i \neq j, m_{ij}^{a''} < \infty)$$

による取り替えによって移りあう。

(3) $\omega = (a, w, a') \in \text{Hom}_{\mathcal{W}(\mathcal{R})}(a, a')$ とする。

$$(1.13) \quad \ell(\omega) = |\{\alpha \in R(a') | w(\alpha) \in -R(a)\}|$$

が成り立つ。

(4) すべての $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{H}(a_1, a_2) \neq \emptyset$ であると仮定する。
 $|R(a)| < \infty$ とし、 $M := |R(a)|$ とおく。このとき $M = \max\{\ell(\omega) | \omega \in \mathcal{W}(\mathcal{R})\}$ であって、各 $a \in \mathcal{A}$ にたいして $\ell((a, w, a')) = M$ となる $a' \in \mathcal{A}$ と $w \in \mathcal{H}(a, a')$ がただ一つ存在する。さらに $w(R^+(a')) = -R^+(a)$ が成り立つ。

Theorem 1.2 (4) の w を $1^a w_0$ と表わし、 (a, w, a') を $1^a \omega_0$ と表わす。

2 別の定義

$\mathcal{V}$ の $\mathbb{R}$ -基底 $\{\epsilon_i | i \in I\}$ を固定する。 $\mathcal{V}$ 内の階数 N の自由 $\mathbb{Z}$ -加群を $\mathbb{L} := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \epsilon_i$ によって定義する。 $\mathbb{B}$ を $\mathbb{L}$ の $\mathbb{Z}$ -基底の集合とする。 $R \subset \mathbb{L}$ と $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ の組

$$(R, \mathbb{A})$$

が *Secondary generalized root system* であるとは次の (sR1)-(sR5) をみたすときに言う。

- (sR1) $R = (R \cap \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi) \cup -(R \cap \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi) \quad (\Pi \in \mathbb{A}).$
- (sR2) $R \cap \mathbb{Z} \alpha = \{\alpha, -\alpha\} \quad (\alpha \in \Pi \in \mathbb{A}).$
- (sR3) $\forall \alpha \neq \beta \in \forall \Pi \in \mathbb{A}, \exists n_{\alpha, \beta}^{\Pi} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
 $\{\beta, \beta + n_{\alpha, \beta}^{\Pi} \alpha\} \subset R \cap (\beta + \mathbb{Z} \alpha) \subset \{\beta + k \alpha | k \in J_{0, n_{\alpha, \beta}^{\Pi}}\}.$
- (sR4) $\forall \alpha \in \forall \Pi \in \mathbb{A}, \tilde{\zeta}_{\alpha}(\Pi) := \{-\alpha\} \cup \{\beta + n_{\alpha, \beta}^{\Pi} \alpha | \beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}\} \in \mathbb{A}.$
- (sR5) $\forall \Pi, \forall \Pi' \in \mathbb{A}, \exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \exists \Pi_m \in \mathbb{A} \ (m \in J_{1, k}), \Pi_1 = \Pi, \Pi_k = \Pi',$
 $\exists \beta_m \in \Pi_m \ (m \in J_{1, k-1}), \tilde{\zeta}_{\beta_m}(\Pi_m) = \Pi_{m+1}.$

Lemma 2.1. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C}, (R(a))_{a \in \mathcal{A}})$ を *generalized root system of type $\mathcal{C}$* とする。 $a^* \in \mathcal{A}$ とする。

$$\mathbb{A} := \{\{1^{a^*} s_{f,t}(\alpha_i^{a^*,t}) | i \in I\} | f \in \text{Map}_\infty^I, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく。このとき $(R(a), \mathbb{A})$ は *secondary generalized root system* である。さらに $|R(a^*)| < \infty$ のとき

$$\mathbb{A} = \{\Pi \subset R(a^*) | |\Pi| = N, R(a^*) = (R(a^*) \cup \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi) \cup (-(R(a^*) \cup \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi))\}$$

が成り立つ。

$(R, \mathbb{A})$ を Secondary generalized root system とする。

$$\tilde{\mathbb{A}} := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \underbrace{\mathbb{L} \times \dots \times \mathbb{L}}_N | \{\alpha_i | i \in I\} \in \mathbb{A}\}$$

とおく。各 $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \tilde{\mathbb{A}}$ および $i, j \in I$ に対して $(a) := \{\alpha_i | i \in I\} \in \mathbb{A}$ とおき

$$c_{ij}^a := \begin{cases} -2 & \text{if } i = j, \\ -n_{\alpha_i, \alpha_j}^{(a)} & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

とおく。このとき $C^a := [c_{ij}^a]_{i,j \in I}$ は generalized Cartan matrix である。各 $a \in \tilde{\mathbb{A}}$, $i \in I$ に対して a の第 i -成分を α_i^a と書く。すなわち $a = (\alpha_i^a | i \in I)$ である。各 $i \in I$ に対して写像 $\varsigma_i : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$ を

$$\varsigma_i(a) := (\alpha_j^a - c_{ij}^a \alpha_i^a | j \in I)$$

によって定義する。すなわち $\alpha_j^{\varsigma_i(a)} = \alpha_j^a - c_{ij}^a \alpha_i^a$ である。このとき

$$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(I, \tilde{\mathbb{A}}, (\varsigma_i)_{i \in I}, (C^a)_{a \in \tilde{\mathbb{A}}})$$

は Cartan scheme である。特に

$$\alpha_j^a = \alpha_j^{\varsigma_i(a)} - c_{ij}^a \alpha_i^{\varsigma_i(a)} = \alpha_j^{\varsigma_i(a)} - c_{ij}^{\varsigma_i(a)} \alpha_i^{\varsigma_i(a)} \quad (i, j \in I)$$

が成り立つ。

$a^* \in \tilde{\mathbb{A}}$ を固定し、

$$\mathcal{A} := \{a_{f,t}^* \in \tilde{\mathbb{A}} | f \in \text{Map}_\infty^I, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく。このとき

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{A}, (\varsigma_i)_{i \in I}, (C^a)_{a \in \tilde{\mathbb{A}}})$$

は Cartan scheme である。

Lemma 2.2. $(R, \mathbb{A})$ を *Secondary generalized root system* とする。各 $a \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{V}^a := \mathcal{V}$, $R(a) := R$ とおく。このとき $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C}, (R(a))_{a \in \mathcal{A}})$ は *generalized root system of type C* である。特に

$$s_i^a = \text{id}_{\mathcal{V}} \quad (a \in \mathcal{A}, i \in I)$$

である。

References

- [1] M. Cuntz, *A lecture on finite Weyl groupoids*, Oberwolfach (October 2012), 1–14. available at <http://www.mathematik.uni-kl.de/~cuntz/download/lecwg.pdf>.
- [2] I. Heckenberger and H. Yamane, *A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem*, Math. Z. 259 (2008), no. 2, 255–276.
- [3] ———, *Drinfel'd doubles and Shapovalov determinants*, Rev. Un. Mat. Argentina 51 (2010), no. 2, 107–146.
- [4] S. Azam, H. Yamane, M. Yousofzadeh, *Classification of Finite Dimensional Irreducible Representations of Generalized Quantum Groups via Weyl Groupoids*, preprint, arXiv:1105.0160
- [5] I. Heckenberger, F. Spill, A. Torrielli, H. Yamane, *Drinfeld second realization of quantum affine superalgebras of $D^{(1)}(2, 1; x)$ via the Weyl groupoid*, Kokyuroku Bessatsu B8 (2008), 171–216, arXiv:0705.1071

ある有理式環の微分代数について

河本直紀

1 はじめに

標数 0 の体 F 上の可換結合代数 A の微分代数 $\text{Der}(A)$ はブラケット積

$$[a\partial_1, b\partial_2] = a\partial_1(b)\partial_2 - b\partial_2(a)\partial_1 \quad (a, b \in A, \partial_1, \partial_2 \in \text{Der}(A))$$

により Lie 代数となる．さまざまな可換代数のうちで, V.I. Arnold [1] (和訳は [2]) は $\mathbb{C}[x], \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ の次に $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}]$ を考えることを提案している． $\mathbb{C}[x], \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ の微分代数 $\text{Der}(\mathbb{C}[x]), \text{Der}(\mathbb{C}[x^{\pm 1}])$ についてはよく知られているのでここでは $F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}]$ の微分代数 $\text{Der}(F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}])$ を考える．その Lie 代数としての構造を調べることにより $\text{Der}(F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}])$ が無限次元の単純 Lie 代数になることを示す．またこれらはさらに一般化できることも示す．

2 単純性

標数 0 の体 F 上の x を不定元とする可換代数 $F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}]$ の微分代数

$$D = \text{Der}(F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}])$$

は

$$w_{n,m} = \frac{x^n}{(1-x)^m} \partial \quad (n, m \in \mathbb{Z}, \partial = \frac{\partial}{\partial x})$$

で生成される．このとき Lie 積は

$$\begin{aligned} [w_{n,m}, w_{k,\ell}] &= \frac{x^n}{(1-x)^m} \partial \left(\frac{x^k}{(1-x)^\ell} \partial \right) - \frac{x^k}{(1-x)^\ell} \partial \left(\frac{x^n}{(1-x)^m} \partial \right) \\ &= (k-n) \frac{x^{n+k-1}}{(1-x)^{m+\ell}} \partial + (\ell-m) \frac{x^{n+k}}{(1-x)^{m+\ell+1}} \partial \\ &= (k-n) w_{n+k-1, m+\ell} + (\ell-m) w_{n+k, m+\ell+1} \\ &\quad (n, m, k, \ell \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

となる．

ここで $\{w_{n,0} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ の張る D の部分空間を $W_{\mathbb{Z}}$ とすると $W_{\mathbb{Z}}$ は D の部分代数となり単純であることが知られている．

定理 1 Lie 代数として D は単純である.

証明 D のイデアル K が元 $\alpha \neq 0$ をもてば, $m < 0$ として十分小さい m をとると $[\alpha, w_{n,m}]$ の係数の $(1-x)^{-1}$ の項を消することができる. すなわち

$$[\alpha, w_{n,m}] \in W_{\mathbb{Z}}$$

とできる. $W_{\mathbb{Z}}$ は単純だから $W_{\mathbb{Z}} \subseteq K$ となり $K = D$ が得られる. すなわち D は単純となる.

3 イデアル

ベクトル空間 L の基底 $\{e_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ に対して積を

$$[e_{n,m}, e_{k,\ell}] = (k-n)e_{n+k-1,m+\ell} + (\ell-m)e_{n+k,m+\ell+1}$$

で定めると L は Lie 代数となる. この Lie 代数は type L と呼ばれている [4]. ここで

$$v_{n,m} = e_{n,m} - e_{n+1,m} - e_{n,m-1} \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

とおくと

$$[v_{n,m}, e_{k,\ell}] = (k-n)v_{n+k-1,m+\ell} + (\ell-m)v_{n+k,m+\ell+1}$$

となる. これより I を $\{v_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ の張る L の部分空間とすると I は L のイデアルとなる.

L から D への線型写像 φ を

$$\varphi(e_{n,m}) = w_{n,m} \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

で定めると上から φ は Lie 代数の準同型となる. このとき

$$\begin{aligned} \varphi(v_{n,m}) &= w_{n,m} - w_{n+1,m} - w_{n,m-1} \\ &= \frac{x^n}{(1-x)^m} \partial - \frac{x^{n+1}}{(1-x)^m} \partial - \frac{x^n}{(1-x)^{m-1}} \partial \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり

$$I \subseteq \text{Ker} \varphi$$

がわかる.

定理 2 $I = \text{Ker} \varphi$ となり L/I は D と同型で, I は L の極大イデアルである.

証明 $v \in L$ に対して L/I においては $\bar{v} = v + I$ と表わすことにすると

$$\overline{v_{n,m}} = \overline{e_{n,m}} - \overline{e_{n+1,m}} - \overline{e_{n,m-1}} = \bar{0}$$

となる. これより

$$\overline{e_{n,m-1}} = \overline{e_{n,m}} - \overline{e_{n+1,m}}$$

から $\overline{e_{n,m}}$ ($m < 0$) は $\{\overline{e_{n,0}} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ の線形結合で表わされる. また

$$\overline{e_{n+1,m}} = \overline{e_{n,m}} - \overline{e_{n,m-1}}$$

より $\overline{e_{n,m}}$ ($n, m > 0$) は $\{\overline{e_{0,m}}, \overline{e_{n,0}} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ の線形結合で表わされる. 同様に

$$\overline{e_{n,m}} = \overline{e_{n+1,m}} + \overline{e_{n,m-1}}$$

より $\overline{e_{n,m}}$ ($n < 0, m > 0$) は $\{\overline{e_{0,m}}, \overline{e_{n,0}} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}$ の線形結合で表わされる.

ここで $\{e_{n,0}, e_{0,m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ の張る L の部分空間を S とすると

$$L = S + I$$

となり,

$$\varphi(e_{n,0}) = x^n \partial, \quad \varphi(e_{0,m}) = \frac{1}{(1-x)^m} \partial$$

より $S \cap \text{Ker} \varphi = 0$ となる. よって modular law より $I = \text{Ker} \varphi$ となり, L/I は D に同型となる. また D が単純であることから I が L の極大イデアルとなる.

4 2変数関数

x, y を不定元として可換代数 $F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}, y^{\pm 1}, (1-y)^{-1}]$ の微分代数

$$D_2 = \text{Der}(F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}, y^{\pm 1}, (1-y)^{-1}])$$

は

$$w_{M,i} = a(M) \partial_i \quad (M = (m_{pq}) \in M_2(\mathbb{Z}), i \in \{1, 2\})$$

ただし

$$a(M) = \frac{x^{m_{11}}}{(1-x)^{m_{12}}} \frac{y^{m_{21}}}{(1-x)^{m_{22}}}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

で生成される. ここで $E_{ij} \in M_2(\mathbb{Z})$ を (i, j) 成分が 1 で他は 0 となる行列とすると

$$\partial_i(a(M)) = m_{i1}a(M - E_{i1}) + m_{i2}a(M + E_{i2})$$

となる. よって Lie 積は

$$\begin{aligned}
[w_{M,i}, w_{N,j}] &= a(M)\partial_i(a(N)\partial_j) - a(N)\partial_j(a(M)\partial_i) \\
&= a(M)(n_{i1}a(N - E_{i1}) + n_{i2}a(N + E_{i2}))\partial_j \\
&\quad - a(N)(m_{j1}a(M - E_{j1}) - m_{j2}a(M + E_{j2}))\partial_i \\
&= n_{i1}a(M + N - E_{i1})\partial_j - m_{j1}a(M + N - E_{j1})\partial_i \\
&\quad + n_{i2}a(M + N + E_{i2})\partial_j - m_{j2}a(M + N + E_{j2})\partial_i \\
&= n_{i1}w_{M+N-E_{i1},j} - m_{j1}w_{M+N-E_{j1},i} \\
&\quad + n_{i2}w_{M+N+E_{i2},j} - m_{j2}w_{M+N+E_{j2},i} \\
&\quad (M = (m_{pq}), N = (n_{pq}) \in M_2(\mathbb{Z}), i, j \in \{1, 2\})
\end{aligned}$$

となる.

定理 3 Lie 代数として D_2 は単純である.

証明 定理 1 と同様に D_2 のイデアル K が元 $\alpha \neq 0$ をもてば, M として m_{12}, m_{22} が負で十分小さいものをとると, $[\alpha, w_{M,i}]$ の係数に含まれる $(1-x)^{-1}, (1-y)^{-1}$ の項を消すことができ

$$[\alpha, w_{M,i}] \in W_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$$

とできる. $W_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ は単純だから [3], $K = D_2$ となり D_2 は単純となる.

5 拡大

D_2 についても D と同様に拡大を構成することができる. ベクトル空間 L_2 の基底を $\{e_{M,i} \mid M \in M_2(\mathbb{Z}), i \in \{1, 2\}\}$ とするときに積を

$$\begin{aligned}
[e_{M,i}, e_{N,j}] &= n_{i1}e_{M+N-E_{i1},j} - m_{j1}e_{M+N-E_{j1},i} \\
&\quad + n_{i2}e_{M+N+E_{i2},j} - m_{j2}e_{M+N+E_{j2},i} \\
&\quad (M = (m_{pq}), N = (n_{pq}) \in M_2(\mathbb{Z}), i, j \in \{1, 2\})
\end{aligned}$$

で定めると L_2 は Lie 代数となる. ここで

$$v_{M,i} = e_{M,i} - e_{M+E_{i1},i} - e_{M-E_{i2},i} \quad (M \in M_2(\mathbb{Z}), i \in \{1, 2\})$$

とおくと

$$\begin{aligned}
[v_{M,i}, v_{N,j}] &= n_{i1}v_{M+N-E_{i1},j} - m_{j1}v_{M+N-E_{j1},i} \\
&\quad + n_{i2}v_{M+N+E_{i2},j} - m_{j2}v_{M+N+E_{j2},i} \\
&\quad (M = (m_{pq}), N = (n_{pq}) \in M_2(\mathbb{Z}), i, j \in \{1, 2\})
\end{aligned}$$

となる. これより I_2 を $\{v_{M,i} \mid M \in M_2(\mathbb{Z}), i \in \{1, 2\}\}$ の張る L_2 の部分空間とすると I_2 は L_2 のイデアルとなる.

次に $\{e_{nE_{i1},j}, e_{mE_{i2},j} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, i, j \in \{1, 2\}\}$ の張る L_2 の部分空間を S_2 とすると

$$L_2 = S_2 + I_2$$

となる. このとき定理 2 と同様にして次が成立する.

定理 4 L_2/I_2 は D_2 と同型である.

6 増大列

可換代数において有理式を

$$\frac{1}{2-x}, \frac{1}{3-x}, \frac{1}{4-x}, \dots$$

と追加することにより増大列

$$\begin{aligned} F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}] &< F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}, (2-x)^{-1}] \\ &< F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}, (2-x)^{-1}, (3-x)^{-1}] \\ &< \dots \end{aligned}$$

が作られる. これから微分代数を考えることにより定理 1 を拡張することができる. あるいはまた不定元の数を

$$z, u, v, \dots$$

と増やすことで増大列

$$\begin{aligned} F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}] &< F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}, y^{\pm 1}, (1-y)^{-1}] \\ &< F[x^{\pm 1}, (1-x)^{-1}, y^{\pm 1}, (1-y)^{-1}, z^{\pm 1}, (1-z)^{-1}] \\ &< \dots \end{aligned}$$

を作ることにもできる. さらに有理式の追加と不定元の追加の組み合わせも考えられる. これにより上と同様にしてさらに無限次元の単純 Lie 代数を構成することが可能である.

参考文献

[1] V.I. Arnold, Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts? in 'Mathematics: Frontiers and Perspectives', 403-416, American Mathematical Society, Providence, 2000.

- [2] V.I. アーノルド, 多元数学 数学は単一の科学か, それとも技法の集まりか? 「数学の最先端 21 世紀への挑戦 第 3 巻」, 8-26, シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2003.
- [3] N. Kawamoto, Generalizations of Witt algebras over a field of characteristic zero, Hiroshima Math. J. **16**(1986), 417-426.
- [4] J.M. Osborn and K. Zhao, Infinite dimensional Lie algebras of type L, Comm. in Algebras, **31**(2003), 2445-2469.

〒 737-8512

呉市若葉町 5-1

海上保安大学校

基礎教育講座

E-mail: kawamoto@jcga.ac.jp

List of talks

Toshiharu Ikeda	Simple n -Block algebras の同型定理
Fujio Kubo	Deformation theory of low dimensional algebras
Yoshimi Kashiwagi	Pless power moment and 2-weight projective codes
Yoji Yoshii	新種の多項式について
Takanori Sakamoto	Some properties of factorized Lie algebras II
Hiroyuki Yamane	Weyl groupoid について
Naoki Kawamoto	ある有理式環の微分代数について