平成 19 年 10 月 5 日

４元数を高校数学へ

〜複素数からの発展、あるいはベクトル、三角関数の応用として〜

自然科学系　吉井 洋二（准教授）
秋田工業高等専門学校
〒 *011-8511*　**秋田市飯島文京町** *1-1*
e-mail: yoshii@akita-nct.jp

１８４３年ハミルトンが４元数を発見
（ペリー来航の１０年前）

実数を係数に持つ i **と** j **の文字式に、**

$$ij = -ji \quad \text{と} \quad i^2 = j^2 = -1$$

という関係式を入れた式を数とみなし、４元数と呼ぶ。
たとえば、

$$\begin{aligned} 3i^3 - 2j^6 + 7ij - i^2j - ij^2 - 4ji + (ij)^2 &= -3i + 2 + 7ij + j + i + 4ij - i^2j^2 \\ &= 1 - 2i + j + 11ij \end{aligned}$$

同様の簡約化により、４元数はいつも

$$a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad k := ij$$

と書ける。ここで、k **は、**i **や** j **と同様の関係式を持つ：**

$$\begin{aligned} k^2 &= (ij)(ij) = -i^2j^2 = -1, \\ ik &= i(ij) = -iji = -ki, \\ jk &= j(ij) = -ijj = -kj \end{aligned}$$

４元数の集合を $\mathbb{H}$ **で表す。**

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

４元数 $\mathbb{H}$ **が複素数**

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

を部分集合として含むことは明らかであろう。

４元数 $\mathbb{H}$ は複素数と違って積の交換法則が成り立たないが、いろいろな面白い性質を持つ。　たとえば、

$$(i+j)^2 = i^2 + ij + ji + j^2 = i^2 + j^2 = -2$$

従って、

$$\left(\frac{i+j}{\sqrt{2}}\right)^2 = -1$$

同様に、

$$(bi + cj + dk)^2 = b^2 i^2 + c^2 j^2 + d^2 k^2 = -b^2 - c^2 - d^2$$

が成り立つので、

$$\left(\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}\right)^2 = -1$$

が成り立つ。従って、

$$U = \{bi + cj + dk \mid b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

とおけば、任意の $u \in U$ に対して、$u^2 = -1$ が成り立つ。ここで、

$$I := \{bi + cj + dk \mid b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

を通常の xyz 空間と同一視すれば（x 軸を i 軸、y 軸を j 軸、z 軸を k 軸と考える)、U は通常の空間 $I \approx \mathbb{R}^3$ における、原点中心の半径１の球面となる。即ち、

$$U \approx S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

また、

$$\{a + eu \mid a, e \in \mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{C}$ と同一視できる。即ち、$\mathbb{H}$ は無限個の $\mathbb{C}$ のコピーを含んでいる。さらに、

$$\mathbb{H} = \{a + eu \mid a, e \in \mathbb{R},\ u \in U\}$$

と書けることに注意すれば、

$$x^2 = -1$$

という方程式の解は無限個あり、その解集合は U であることがわかる。

４元数 $\mathbb{H}$ は４次元の数と考えてよいが、４次元は未だ人間にはよく見えない。ところが、$\mathbb{H}$ の部分集合 I は３次元であり、そこでの積はとても興味深い。実際、

$$\alpha = b_1 i + c_1 j + d_1 k, \quad \beta = b_2 i + c_2 j + d_2 k \in I$$

に対して、

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (b_1 i + c_1 j + d_1 k)(b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (b_2 d_1 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - b_2 c_1) k \end{aligned}$$

となる。ここで、$I \approx \mathbb{R}^3$ により $\alpha = (b_1, c_1, d_1)$, $\beta = (b_2, c_2, d_2)$ と考えれば、前半は $-\alpha \cdot \beta$ になっている。では後半は？

$ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ **という関係があり、これは i, j, k を基本ベクトルと考えたときの外積が満たす関係式に等しい。従って、後半部分は $\alpha \times \beta$ になっている！ 即ち、**

$$\alpha\beta = -\alpha \cdot \beta + \alpha \times \beta$$

である。実は、内積や外積は４元数から生まれたのである !!

（注） $\alpha, \beta \in I$ **に対して、$\alpha\beta \notin I$ であり。これはリサランドールが提唱する５次元の世界に対応してないか？ （$\mathbb{H}$ に時間軸を加えて５次元！）**

さて、複素数と同様、$\alpha = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ に対して、

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

と定義すると、$\beta \in \mathbb{H}$ に対して、

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \tag{1}$$

が成り立つ。（これは自明ではなく、大きな発見だった。）複素数の部分集合

$$S := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\}$$

は積について閉じていて、この集合は複素平面の原点を中心とした半径１の円と同一視できた。では

$$S^3 := \{\alpha \in \mathbb{H} \mid |\alpha| = 1\}$$

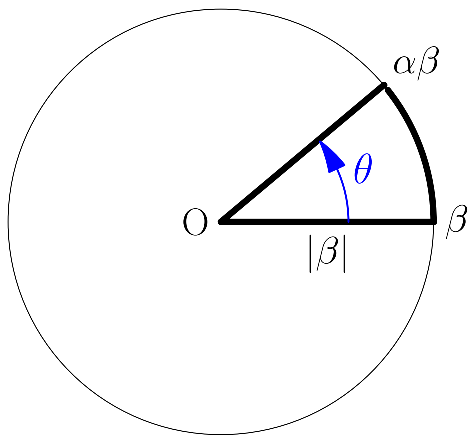
は何か？

これも (1) より積について閉じていて、４次元の中の３次元球と考えられる。（昨年のフィールズ賞はこの球が持つ幾何学的性質を証明した数学者に与えられた。）

複素数と $\alpha \in S$ との積は回転を与える。実際、$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ と書けるから、$\beta = a + bi \in \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ に対して、

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (\cos\theta + i\sin\theta)(a+bi) \\ &= a\cos\theta - b\sin\theta + i(b\cos\theta + a\sin\theta) \\ &\approx \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから、$\alpha\beta$ の位置は β の位置を原点の周りに θ だけ回転した位置にある。（最後の $\approx$ は $x + yi \in \mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ の点 (x, y) と同一視したということ）



同様に４元数と $\alpha \in S^3$ との積は４次元の回転を与える。ところが、４次元の回転はこれまた人間の目ではほとんど見ることができない。（数学的記述は簡単だが、どのような動きかはわからない。物理学では S^3 をユニタリー群 $SU(2)$ と同一視して、素粒子モデルに応用している。この理論では、４元数を数と見ず、複素数成分の 2×2 行列と見ている。）

そこで、$\alpha \in S^3$ を３次元（空間 $\mathbb{R}^3$）の回転を表すのに使えないか？という疑問が起きる。
実はこれも可能なのである !!

まず、準備として、$\mathbb{C}$ における共役という概念を拡張する。即ち、$a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ に対して、共役４元数

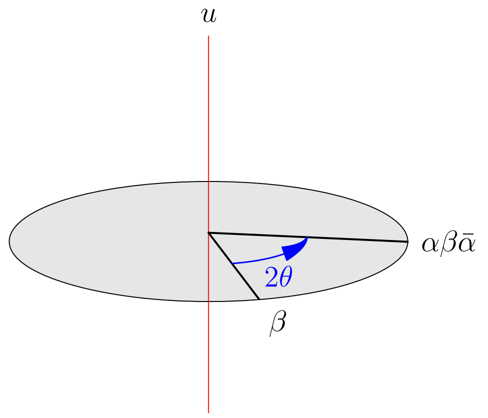
$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$$

を定義する。次に、ある $u \in U$ があって、$\alpha = a + eu$ と書けたわけだから、$|\alpha| = 1$ ならば $a^2 + e^2 = 1$ であることがわかる。従って、$\alpha = \cos\theta + u\sin\theta$ と書ける。

このとき、$\beta \in I \approx \mathbb{R}^3$ に対して、$\alpha\beta\overline{\alpha} \in I$ が言えて、

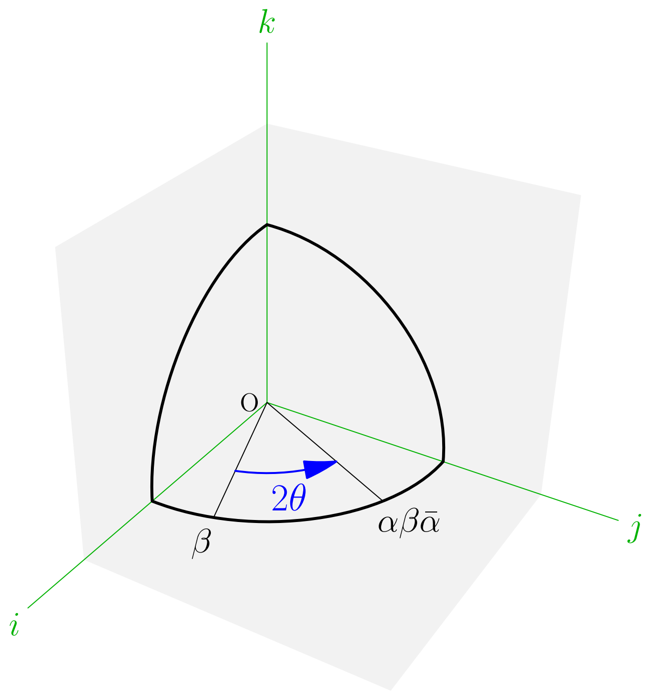
$\alpha\beta\overline{\alpha}$ の位置は β の位置を u 軸の周りに 2θ だけ回転した位置にある

ことが証明できる。従って、θ を動かしたり、u を動かすことにより、$\alpha = \cos\theta + u\sin\theta$ は空間のすべての回転を表現することができる !!!



例　$u = k$ **の場合、即ち** $\alpha = \cos\theta + k\sin\theta$ **ならば、**$\beta = bi + cj$ **に対して、**

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta\overline{\alpha} &= (\cos\theta + k\sin\theta)(bi + cj)(\cos\theta - k\sin\theta) \\
&= bi\cos^2\theta - bik\cos\theta\sin\theta + cj\cos^2\theta - cjk\cos\theta\sin\theta \\
&+ bki\cos\theta\sin\theta - bkik\sin^2\theta + ckj\cos\theta\sin\theta - ckjk\sin^2\theta \\
&= bi(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2ci\cos\theta\sin\theta + 2bj\cos\theta\sin\theta + cj(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&= i(b\cos 2\theta - c\sin 2\theta) + j(b\sin 2\theta + c\cos 2\theta) \\
&\approx \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$



（注）

$$\begin{aligned} \alpha(dk)\overline{\alpha} &= (\cos\theta + k\sin\theta)(dk)(\cos\theta - k\sin\theta) \\ &= (\cos\theta + k\sin\theta)(\cos\theta - k\sin\theta)(dk) \\ &= dk \end{aligned}$$

従って、線形写像 $\alpha(\ \cdot\ )\overline{\alpha}$ を表す行列は、

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

一般の $u \in U$ に対しては、うまく $v, w \in U$ を取って、$\{v, w, u\}$ が I の正規直交基底になるようにすると、なんと、v, w, u は i, j, k と同じ関係式を持つ！
例えば、

$$v^2 = w^2 = u^2 = -1,$$

$$\text{また}\quad vw = -v \cdot w + v \times w = u,$$

$$wv = -w \cdot v + w \times v = -u \quad \text{より}$$

$$vw = -wv \quad \text{等々。}$$

従って、上と全く同じ計算から、$\alpha = \cos\theta + u\sin\theta$ に対して、この基底に関する、線形写像 $\alpha(\ \cdot\ )\overline{\alpha}$ を表す行列は上と全く同じ

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

になる！

もちろん、$\alpha = \cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2}$ にとっておけば、$\alpha(\ \cdot\ )\overline{\alpha}$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

４元数などは使わず、初めから線形代数を使えば、空間の回転は上記行列で表せることがわかるわけだが、座標変換、固有値、直交行列の理論が駆使されるわけである。４元数のかけ算にさえ慣れておけば、４元数による回転の表現はより直接的で分かり易いと言える。
さらに、空間の回転を表すのにオイラー角、あるいはロールピッチヨー法が有名だが、これらはいくつかの欠点があり（たとえばジンバルロックの問題）、最近の工学者あるいはコンピュータプログラマーは、回転の表現に４元数を使うようになっている。

問　空間上の点 A が点 B へ原点中心の回転で移ったとする。この回転軸、回転角度、そしてこの回転を表す４元数を求めよ。また、ある点 $C(c_1, c_2, c_3)$ がこの回転で移る先を求めよ。

答　原点を O とすると、回転軸はパラメータ t を使って $t(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})$ であり，回転角度を θ とすれば $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$ で計算できる。

さらに、$\frac{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|} = (u_1, u_2, u_3)$ として、$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ とおけば、回転を表す４元数 α は $\alpha = \cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + u\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ と計算できる。（$0 \leq \theta \leq \pi$ としてよいので、$\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$, $\sin\frac{\theta}{2} \geq 0$ としてよい。）

また、点 C の行き先は $\alpha(c_1 i + c_2 j + c_3 k)\overline{\alpha}$ を計算すればよい。(即ち、$\alpha(c_1 i + c_2 j + c_3 k)\overline{\alpha} = d_1 i + d_2 j + d_3 k$ なら、移る先は点 (d_1, d_2, d_3) である。）

謝辞　本文の図は自然科学系の同僚、上林一彦氏によるものです。ここに感謝の意を表します。

参考サイト

http://staff.aist.go.jp/toru-nakata/quaternion.html
http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/contents/course/robotics/coordtrans.html

参考文献

四元数と八元数―幾何、算術、そして対称性
J.H. コンウェイ (著), D.A. スミス (著), 山田 修司 (翻訳)
培風館