平成 21 年 2 月 25 日

「経験から予想するパターン」

$$\int (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}dx$$

等の問題は、経験から予想するのがいいか、あるいは部分積分を利用するのがいいか。。。

この問について、忘れないうちに私が知っている解答例をまとめておきます。

1．これは本校の学生も思いついた、経験から原始関数を予想して、微分したら確かにそうだった、という方法です。これがこの問に対する普通のやり方だと私は考えます。即ち、

$$\left(xe^{\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{\frac{x^2}{2}} + x^2e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}$$

だから $\int (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}dx = xe^{\frac{x^2}{2}} + C$ である。

この例から、すぐに

$$\int (1+xf'(x))e^{f(x)}dx = xe^{f(x)} + C$$

なる公式も作れるでしょう。$\int (1+x)e^x dx = xe^x + C$ などは覚えておくと便利かも知れません。

2．これは本校応用数学科の教員が解いた方法ですが、テクニックとしては高度ですが、予想できなかったらどうするんですか！という学生の質問に対応でき、エレガントな方法です。

$$\begin{aligned}\int (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}dx &= \int e^{\frac{x^2}{2}}dx + \int x^2e^{\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \int e^{\frac{x^2}{2}}dx + \int x\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'dx \qquad \text{(第 1 項が積分不可能であることから第 2 項を部分積分する.)} \\ &= \int e^{\frac{x^2}{2}}dx + xe^{\frac{x^2}{2}} - \int e^{\frac{x^2}{2}}dx \\ &= xe^{\frac{x^2}{2}} + C\end{aligned}$$

2'．これを筑波大学附属駒場中・高等学校の先生に見せたところ、第 2 項はそのままで、第 1 項を部分積分してもよいと指摘されました：

$$\begin{aligned}\int (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}dx &= \int e^{\frac{x^2}{2}}dx + \int x^2e^{\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \int x'e^{\frac{x^2}{2}}dx + \int x^2e^{\frac{x^2}{2}}dx \\ &= xe^{\frac{x^2}{2}} - \int x^2e^{\frac{x^2}{2}}dx + \int x^2e^{\frac{x^2}{2}}dx \\ &= xe^{\frac{x^2}{2}} + C\end{aligned}$$

いろいろな方法があるもんですね。

３．最後は本校物理学科の教員が解いた解法です。

$$
\begin{aligned}
\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' &= xe^{\frac{x^2}{2}} \\
\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'' &= e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}} \\
\therefore \quad & \int (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}dx = xe^{\frac{x^2}{2}} + C
\end{aligned}
$$

どうしてこのような方法を思いついたのか、時間がなくてまだ聞いていません。これは１で述べた予想において、その思考過程の補助になるかも知れません。取りあえず、キーとなりそうな関数 $e^{\frac{x^2}{2}}$ を何回か微分していけば、何かが得られる、という発想でしょうか。（もちろん、積の微分法、$e^{f(x)}$ の微分の特殊性を踏まえての試みでしょう。）

最後に練習問題です。

問　$\int(3x^3-x+1)e^{x^3-x}dx$

（こんな問題が大学入試に出たら問題になるでしょうか？ もちろん、１で述べた公式を学習しておけば、答はすぐに $xe^{x^3-x}+C$ とわかるわけです。まあ、一度でも出れば、その後は受験テクニックとしてこの公式が定着するかも知れません。）