
電磁気学におけるベクトル解析の取り扱いと その教授法の検討

電気情報工学科 助教
坂本 文人

おはなしの流れ

- 電磁気学って、なに？
- どうして電磁気学でベクトル解析？
- ベクトル解析を使った電磁気の世界
(ストークスの定理とガウスの定理を中心に)
- まとめ

電磁気学ってなに？

電磁気学：電気と磁気の世界を理解する学問。
色々な実験事実からスタートし、
1800年代中頃にMaxwellによって
理論が完成される。

光は電磁波，X線も電磁波

電磁気学で最も重要な法則(Maxwell方程式)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(ガウスの法則)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(ガウスの法則)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(ファラデーの法則)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

(アンペール-マクスウェルの法則)

E :電場, B :磁束密度, ρ :電荷密度, j :電流密度, ϵ_0 :空間の誘電率, μ_0 :空間の透磁率, c :光の早さ

電場と磁場は, 電荷と電流によって作られる.
場は電場と磁場の発散と回転で与えられる.
→ 場はベクトルで表現すると便利.

「電気磁気学特論」講義内容

生産システム工学専攻1年後期(全15回)

- 1.ベクトル場とベクトルの演算
- 2.スカラー積とベクトル積
- 3.ベクトルの微分
- 4.ベクトルの積分
- 5.ベクトル解析の諸処の定理
- 6,7.静電場
- 8,9.静磁場
- 10.電磁場と力
- 11.時間的に変化する電磁場
- 12.マクスウェルの方程式
- 13.電磁波の伝搬
- 14.電磁波の放射
- 15.まとめ

講義の1/3を使ってベクトル解析の復習
(必要な内容を厳選して)

一番面白いところ!!

ベクトル解析の復習

- ベクトルの演算1(足し算, 引き算, 内積, 外積)
- ベクトルの演算2(ナブラ演算子, ラプラス演算子)
- ベクトルの演算3(微分と積分(ガウス, ストークスの定理))
- 線積分, 面積分, 体積分
- 直交座標系, 円筒座標系, 極座標系
- 諸処の定理(フーリエ変換, デルタ関数, グリーンの定理)

学生曰く: 数学で勉強したけれど, まさかここで使うとは, , , , ,
殆ど忘れちゃった, , , , ,
数学の教科書の問題は解けるけど, **イメージが湧かない**, , , , ,

物理学の本質: **数式が語ること理解すること.**

→ 数式をうにうにいじって理解した気になるな!!!
(とある大学の物理学科の偉い先生のお言葉.)

ベクトル解析と物理を結ぶために

直感的イメージが湧くように図と言葉を盛りだくさんで説明する.

良い例: ファインマン物理学 (読み物としても面白い)

マイケル・ファラデーの原著論文 (数学を知らないのに、絵と言葉で電磁誘導を説明.)

砂川重信: 理論電磁気学 (高価)

砂川重信: 物理の考え方シリーズ (初学者向け)

ベクトル場の微分(直交座標系)

$$\begin{aligned}\text{発散: } \nabla \cdot A &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x, A_y, A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{回転: } \nabla \times A &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

(ベクトル場の微分は、積分を考えて初めてその意味が理解できる.)

ベクトル場の微分の直感的理解

以下のベクトル場 A を図示すると、
図1~4のどれに対応するか？

(a) $A = \left(0, \frac{1}{1+x^2}, 0\right)$

(b) $A = (x, y, 0)$

(c) $A = (y, x, 0)$

(d) $A = \frac{1}{r}(-x-y, x-y, 0)$

この内、 $\nabla \cdot A = 0, \nabla \times A = 0$ のものは
どれか？まずは計算しないで予想
し、そのあと実際に計算して確か
めよ。

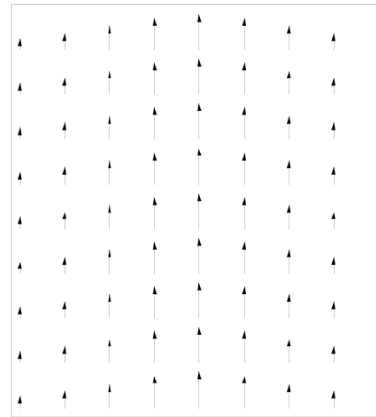


図1

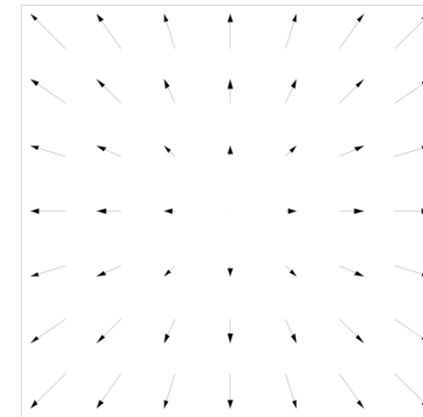


図2

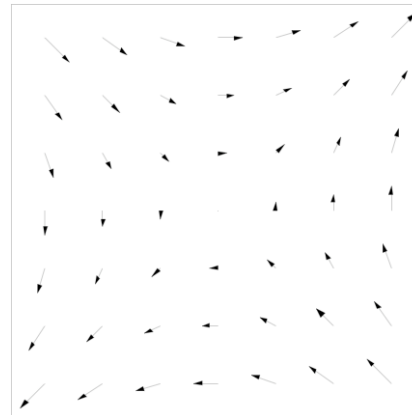


図3

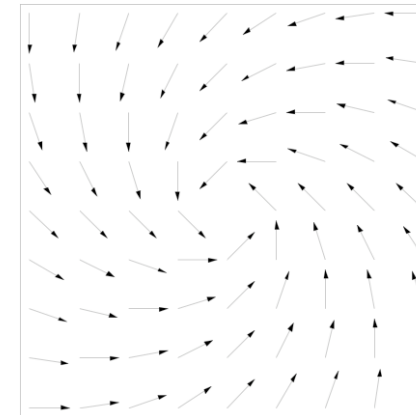


図4

答え

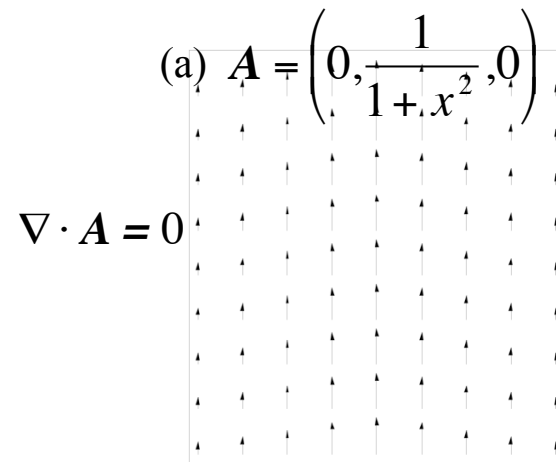


図1

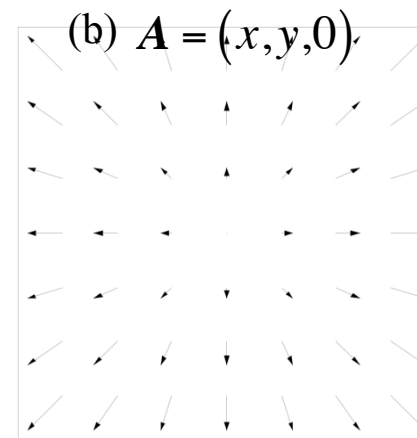


図2

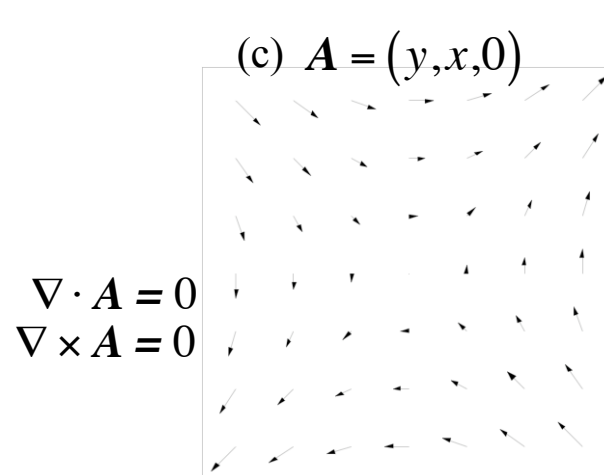


図3

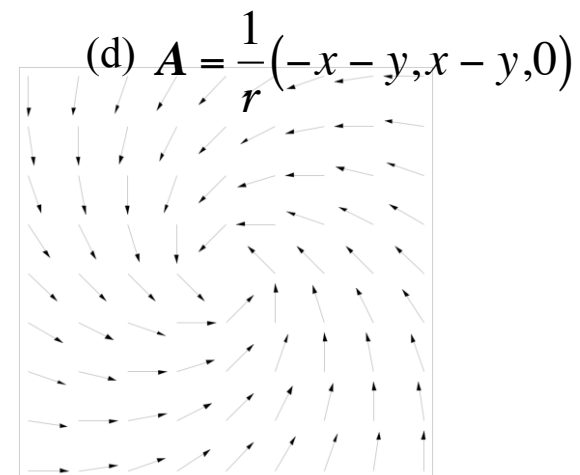
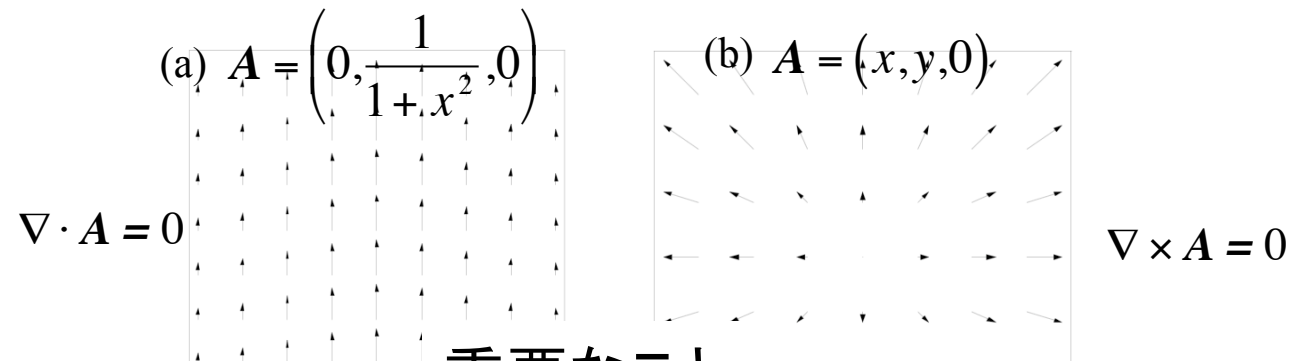


図4

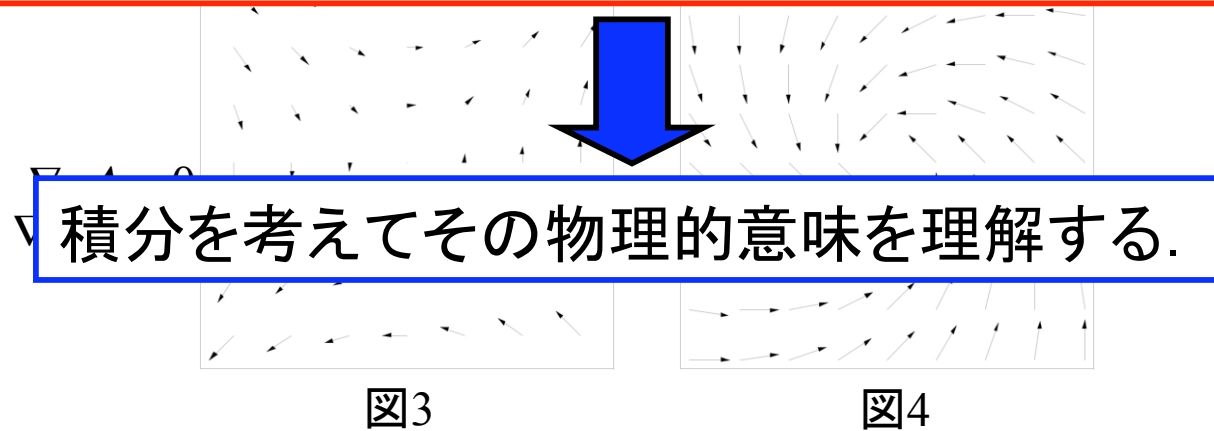
答え



重要なこと

$\nabla \cdot A = 0$: 考えている平空間へ入った分だけ出る, または出た分だけ入ってくる.

$\nabla \times A = 0$: 考えている平空間がベクトル場によって全く回転しない.

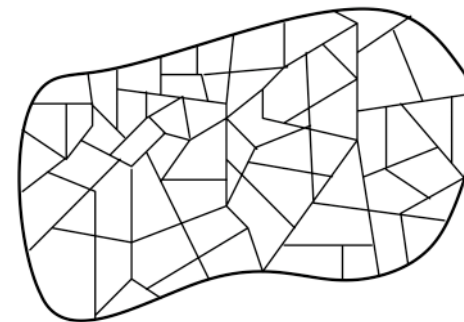
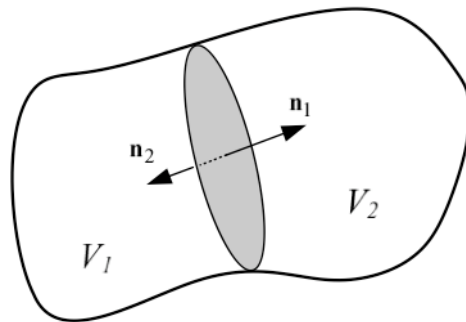
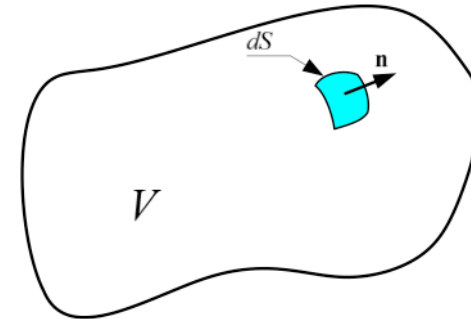


ベクトル場の積分(発散の積分)

熱の流れ A (単位時間, 単位面積あたり: $\text{Jule}/(\text{m}^2\text{sec})$) を三次元で考えてみる.

微小表面から出入りする熱流: $dQ = A \cdot n dS$

考える空間から出入りする全熱流: $Q = \int_V A \cdot n dS$



2分割: $Q = \int_{V_1} A \cdot n dS + \int_{V_2} A \cdot n dS$

たくさん分割:

$$Q = \sum_i \int_{\Delta V_i} A \cdot n_i dS$$

$$= \sum_i \left[\frac{\int_{\Delta V_i} A \cdot n_i dS}{\Delta V_i} \right] \Delta V_i$$

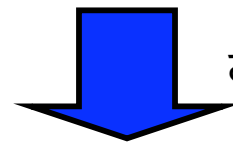
$$= \int_V \left[\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta V} A \cdot n dS}{\Delta V} \right] dV$$

ベクトル場の積分(発散の積分)

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{\int_{\Delta V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V} \right] = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{なので(証明省略),}$$

$$\int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad \text{:ガウスの発散定理}$$

重要な意味: 任意のベクトル場の発散の体積積分は, 表面の面積積分に置き換えられる.



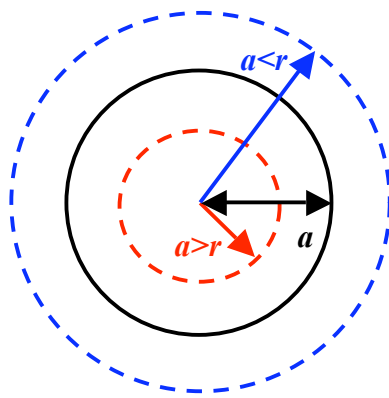
さらに噛み砕いて言うと, . . .

熱流の場合, **発散は単位体積あたりの熱(ベクトル場)の出入り**を表している.
なので, 発散が0とは, 考えている空間に入った分だけ出ている, または出た分だけ入ってくる.
この定理は, どのようなベクトル場(電場, 磁場)についても成立する.

ガウスの定理の応用例

左図に示す半径 a の球内の電荷 Q がー様(電荷密度 ρ)に分布している時, 球内外における電場を求めなさい。

左図のように平曲面を考え, マクスウェル方程式(ガウスの法則): $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ の積分形を適応する。



$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

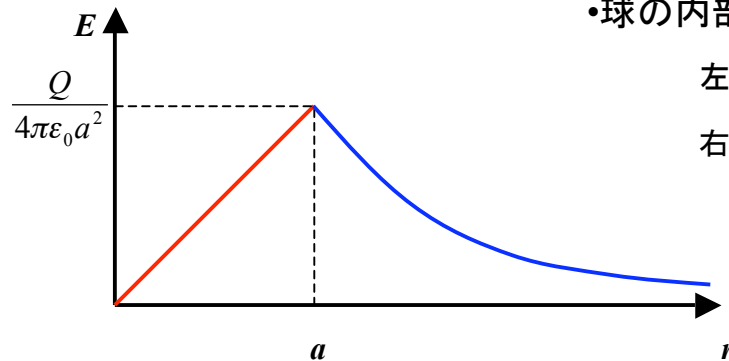
ガウスの発散定理

•球の外部($a < r$)の場合

$$\left. \begin{array}{l} \text{左辺: } \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E(r) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin\theta \\ \qquad \qquad \qquad = 4\pi r^2 E(r) \\ \text{右辺: } \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{array} \right\} \therefore E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

•球の内部($a > r$)の場合

$$\left. \begin{array}{l} \text{左辺: } \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi r^2 E(r) \\ \text{右辺: } \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^3}{a^3} \end{array} \right\} \therefore E(r) = \frac{rQ}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

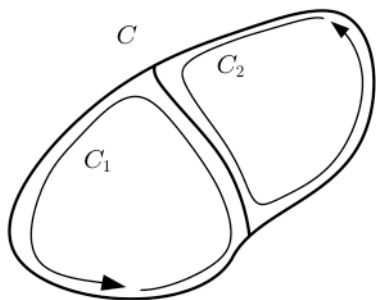
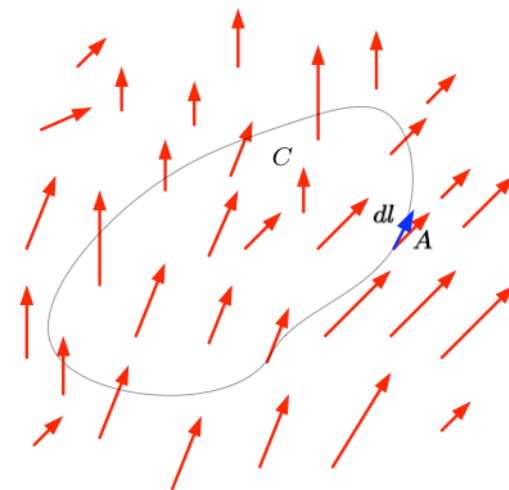


ベクトル場の積分(回転の積分)

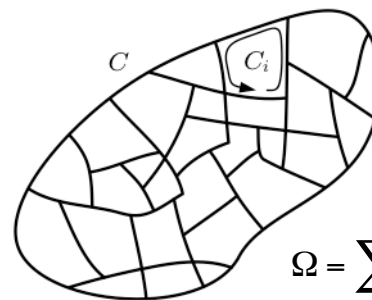
回転のイメージし易くするために、水の流れの中に針金で作ったループを放り投げることを考える。そしてその針金が回転するかどうかを考えることにする。
水の速度場を A とすると、回転 Ω は、

$$\Omega = \oint_C A \cdot dl$$

$\Omega=0$ なら、針金は静止した状態(回転しない)ことを意味している。



2分割:
$$\Omega = \oint_{C_1} A \cdot dl_1 + \oint_{C_2} A \cdot dl_2$$



たくさん分割:

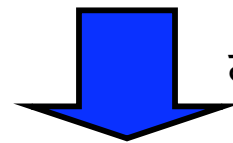
$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_i \oint_{C_i} A \cdot dl_i \\ &= \sum_i \left[\frac{\oint_{C_i} A \cdot dl_i}{\Delta S_i} \right] \Delta S_i \\ &= \int_S \left[\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} A \cdot dl_i}{\Delta S} \right] dS \end{aligned}$$

ベクトル場の積分(回転の積分)

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[\frac{\oint_c A \cdot dl}{\Delta S} \right] = \nabla \times A \cdot n \quad \text{なので(証明省略),}$$

$$\oint_c A \cdot dl = \int_S \nabla \times A \cdot n dS \quad \text{: ストークスの定理}$$

重要な意味: 任意のベクトル場の回転の面積分は, 閉曲線の縁の線積分に等しい.

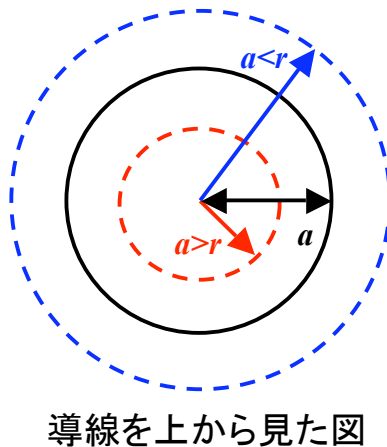


さらに噛み砕いて言うと, . . . ,

流れ場の場合, **回転は流れ場(ベクトル場)において, どれくらい回転しているのかその傾向を示すもの.**
なので, 回転が0とは, 考えているループが水の流れによって全く動かないことを示す.
この定理は, どのようなベクトル場(電場, 磁場)についても成立する.

ストークスの定理の応用例

左図に示す半径 a の無限に長い円筒状の導線に電流 I が一様に(電流密度 j)流れているとき、導線の内外に生じる磁場を求めなさい。



左図のように平曲面を考え、マクスウェル方程式(アンペールの法則): $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ の積分形を適応する。

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理

•円筒の外部($a < r$)の場合

$$\text{左辺: } \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Br \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B$$

$$\text{右辺: } \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

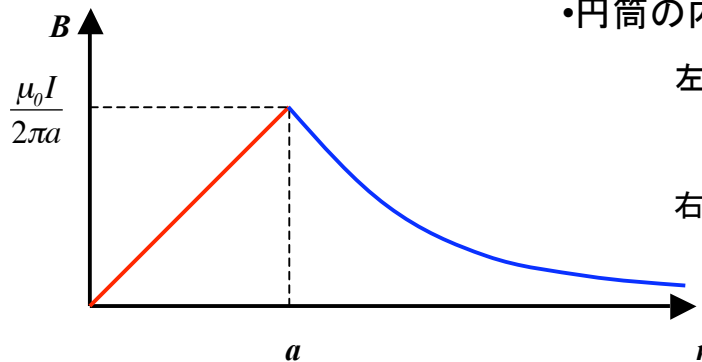
$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

•円筒の内部($a > r$)の場合

$$\text{左辺: } \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Br \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B$$

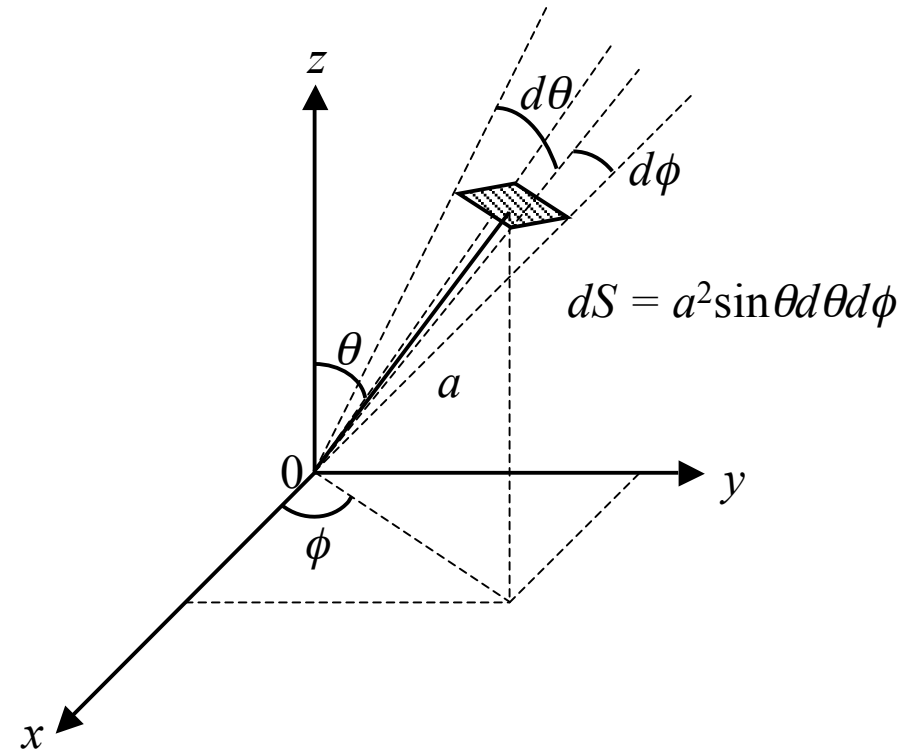
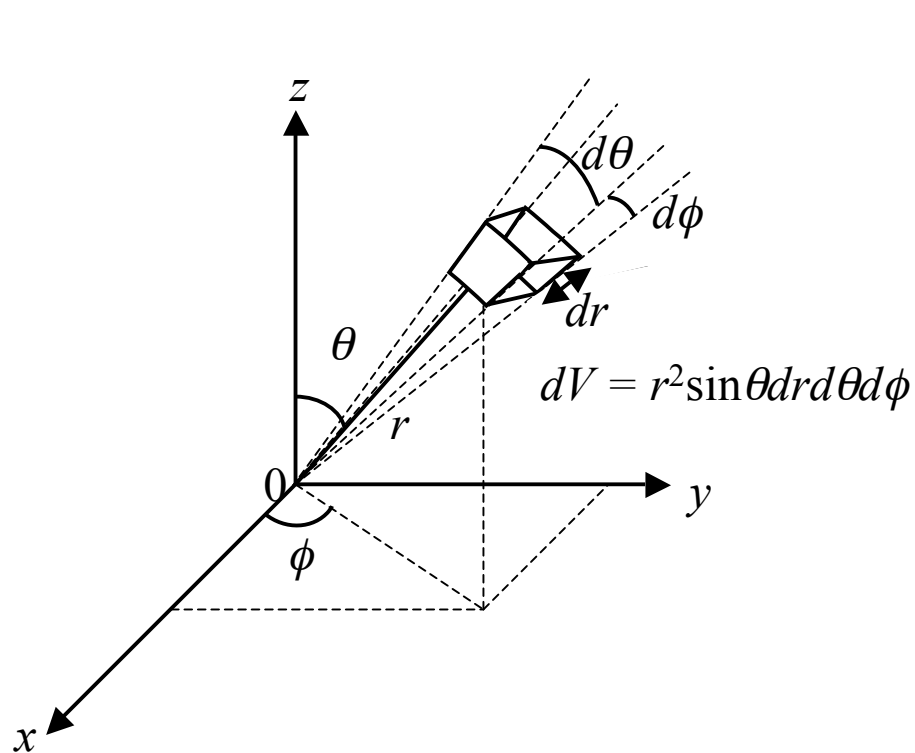
$$\text{右辺: } \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$



エトセトラ(各座標系での積分いろいろ)

なぜ、球の体積は $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ で、表面積は $S = 4\pi r^2$ なの？



円、球の面積、円周、円筒の面積、体積はちゃんと理解しないと暗記しちゃダメ!!!
忘れた時は自分で導出(ヤコビアン).

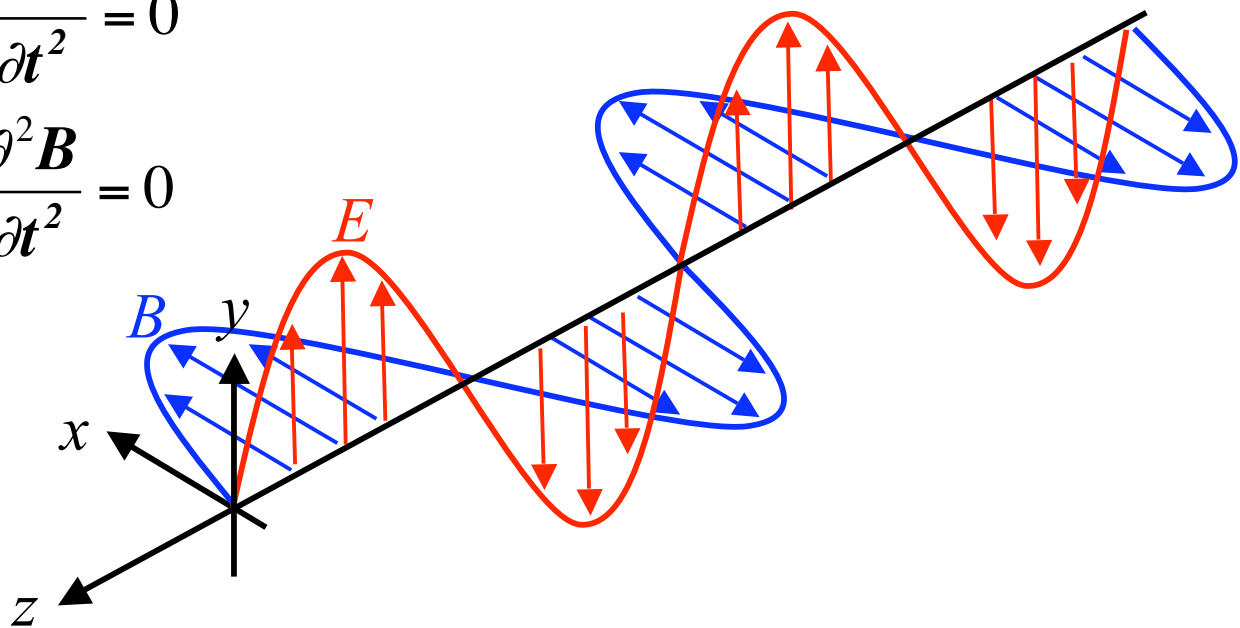
エトセトラ(微分方程式)

Maxwell方程式は微分方程式の固まり.
式の形から解を推測して, 式の意味をしっかり理解.

電磁波の式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

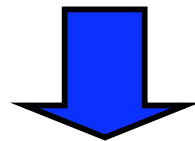


まとめ

電磁気学におけるベクトル解析の取り扱いについて、
ガウスの定理とストークスの定理を例にお話した。

大事なこと：

- 物理学は自然現象を数学を道具に記述し，理解する学問。
（数学と物理学は夫婦も同然．）
- 高専はエンジニアの養成学校。
→ 専門科目を動機とした数学の導入が実戦への近道。



専門科目と一般科目の情報交換，連携は必要不可欠。

電磁気学で有名な参考書

- J.D.Jackson:Classical Electromagnetism, Willy & Sons
- R.P.Feynman:ファインマン物理学Ⅲ電磁気学, 岩波書店
- 砂川重信:理論電磁気学 第3版, 紀伊国屋書店
- 砂川重信:電磁気学の考え方, 岩波書店