

Some properties of factorized Lie algebras II

坂本隆則（福岡教育大学）・本多政宣（新潟薬科大学）

24 August 2012

Group G は 2 つの subgroups A, B によって $G = AB$ と表されているとき, G は A, B によって factorize されるという。1955 年に Itô [6] は

『 A, B が abelian のとき, G は metabelian である』

ことを証明した。これを次のように一般化した問題がある：

『 A, B が nilpotent のとき, G は soluble か？』

G が finite group のときは, Kegel [7] と Wielandt [11] によって肯定的に解決されたが, 一般の場合は, 次の問題

『 A, B が locally nilpotent のとき, G は locally soluble か？』

と共に未解決である。

そこで, 同様なことを Lie algebras で考えてみる。

定義 体 $\mathfrak{k}$ 上の Lie algebra L は 2 つの subalgebras A, B の和として表されている, i.e. $L = A + B$, とき L は A, B によって factorize されるという。

$L = A + B$ のとき, Itô の結果に対応する

『 A, B が abelian のとき, L は metabelian である』

は, 1976 年に Amayo [2] によって証明された。また, groups と同様に次の問題

『 A, B が nilpotent のとき, L は soluble か？』

も未解決である。ただし, L が finite-dimensional のときには, $\text{char } \mathfrak{k} = 0$ の場合

に Goto [4] が, $\text{char } \mathfrak{k} = p > 2$ の場合に Panyukov [8] が, 成り立つことを証明した。 $\text{char } \mathfrak{k} = 2$ の場合には Petravchuk [9] によって反例が与えられた。

さて, groups の場合と同様に次も未解決である：

(LNS) 『 A, B が locally nilpotent のとき, L は locally soluble か?』

我々は [5] において, (LNS) が成り立つためのある十分条件を求めた：

定理 A $\text{char } \mathfrak{k} \neq 2$, $L = A + B \in \mathbf{L}(\text{wser})\mathfrak{F}$ のとき, A, B が locally nilpotent ならば, L は locally soluble である。

また, Aldosray [1] は 1984 年に次の結果を示した：

『 $\text{char } \mathfrak{k} = 0$, $L = A + B \in \mathbf{L}(\triangleleft)\mathfrak{F}$ のとき, $H\text{asc}A, H\text{asc}B \Rightarrow H\text{asc}L$ 』

我々はこれを次のように一般化した：

定理 B $\text{char } \mathfrak{k} = 0$, $L = A + B \in \mathbf{L}(\text{ser})\mathfrak{F}$ のとき, $H\text{ser}A, H\text{ser}B \Rightarrow H\text{ser}L$.

系 C $\text{char } \mathfrak{k} = 0$, $L = A + B \in \mathbf{E}(\triangleleft)\mathfrak{F} \cap \mathbf{L}(\text{ser})\mathfrak{F}$ のとき, $H\text{asc}A, H\text{asc}B \Rightarrow H\text{asc}L$.

ここでは, [3] に従って, Factorized Lie algebras の基本的な性質について述べる。

補題 1 ([10, Lemma 1]) L を factorized Lie algebra by A and B とし, H を L の subalgebra とするとき, 次の (i) と (ii) は同値である：

- (i) $a + b \in H \ (a \in A, b \in B) \implies a, b \in H$
- (ii) $H = (A \cap H) + (B \cap H)$ and $A \cap B \leq H$

定義 補題 1 における条件 (i) 又は (ii) が成り立つとき, H を *factorized subalgebra of L* または *factorized in L* という。

注： $A \cap B$ は最小の factorized subalgebra of L である。

補題 2 ([10, Lemma 2]) $L = A + B$ のとき

- (1) $A \leq H$ または $B \leq H$ ならば, H は factorized in L である。
- (2) $A \cap B = 0$ のとき, $H \leq A$ または $H \leq B$ ならば, H は factorized in L である。

補題 3 ([10, Lemma 3]) L を factorized Lie algebra by A and B とするとき

(1) H_λ : factorized subalgebra of L ($\lambda \in \Lambda$)

$$\implies \cap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda : \text{factorized in } L$$

(2) H_λ : factorized ideal of L ($\lambda \in \Lambda$)

$$\implies \sum_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda : \text{factorized in } L$$

(3) $I \triangleleft L$, $I \leq H \leq L$ のとき

$$H/I : \text{factorized in } L/I \iff H : \text{factorized in } L$$

補題 4 ([10, Lemma 4]) L を factorized Lie algebra by A and B とするとき, H が factorized subalgebra of L ならば

$$H = (A + H) \cap (B + H)$$

定義 L を factorized Lie algebra by A and B とし, H を L の subalgebra とする。 H を含む全ての L の factorized subalgebras の集合を $\mathcal{F}$ とおくと

$$X(H) = \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$$

を *factorizer* of H in L という。補題 3 (1) より, $X(H)$ は H を含む L の最小の factorized subalgebra である。

命題 5 ([10, Proposition 5]) L を factorized Lie algebra by A and B とし, L の subalgebra K が A, B とそれぞれ permutable であるとき,

$$(1) \quad X(K) = (A + K) \cap (B + K)$$

$$(2) \quad \begin{aligned} X(K) &= A \cap (B + K) + K = B \cap (A + K) + K \\ &= A \cap (B + K) + B \cap (A + K) \end{aligned}$$

(3) $\dim K < +\infty$ ならば,

$$\dim(X(K)/A \cap B) < +\infty$$

命題 6 ([10, Proposition 6]) L を factorized Lie algebra by A and B とし, I を L の ideal とする。 $A^2 \leq I$, $B^2 \leq I$ のとき,

$$[X(I), L] \subset I$$

である。特に, $X(I)$ は L の ideal となる。

次に infinite-dimensional factorized Lie algebras の例を与える。

例 ([10, Example]) $\mathfrak{k}$ を field とし,

$\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ = the general linear Lie algebra of all $n \times n$ matrices over $\mathfrak{k}$,

f_{mn} = the natural embedding from $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ to $\mathfrak{gl}(m, \mathfrak{k})$ ($n \leq m$).

とする。そこで,

$$L = \varinjlim \mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k}) = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k}) \quad (\text{the direct limit of } \{\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k}), f_{mn}\}).$$

と定める。さらに,

$\mathfrak{sl}(n, \mathfrak{k})$ = the special linear Lie algebra of all $n \times n$ matrices
with trace zero over $\mathfrak{k}$,

$$S = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{sl}(n, \mathfrak{k}).$$

とおくと, $S \triangleleft L$ である。

(1) そこで,

$\mathfrak{ut}(n, \mathfrak{k})$ = the subalgebra of $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ of all upper triangular $n \times n$ matrices,

$\mathfrak{lt}(n, \mathfrak{k})$ = the subalgebra of $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ of all lower triangular $n \times n$ matrices.

とし,

$$A = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{ut}(n, \mathfrak{k}), \quad B = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{lt}(n, \mathfrak{k}).$$

とおく。このとき, 明らかに $L = A + B$ となる。ところが

$$\begin{aligned} S \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in A + B, \\ \text{but } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\notin S, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin S, \end{aligned}$$

なので, S は factorized in $L = A + B$ でない。さらに

$$S = (A \cap S) + (B \cap S) \quad \text{but} \quad A \cap B \not\subseteq S.$$

である。命題5より

$$S < X(S) = A \cap (B + S) + S = B \cap (A + S) + S.$$

が成り立つ。

(2) 次に

$\mathfrak{uto}(n, \mathfrak{k})$ = the subalgebra of $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ of all upper triangular $n \times n$ matrices
(a_{ij}) with $a_{ii} = 0$ for any even integer i ,

$\mathfrak{lte}(n, \mathfrak{k})$ = the subalgebra of $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{k})$ of all lower triangular $n \times n$ matrices
(a_{ij}) with $a_{ii} = 0$ for any odd integer i .

とし,

$$A' = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{uto}(n, \mathfrak{k}), \quad B' = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{lte}(n, \mathfrak{k}).$$

とすると, 明らかに $L = A' + B'$, $A' \cap B' = 0$ となる。また (1) と同様に S は factorized in $L = A' + B'$ ではない。従って, 補題1より

$$S \supsetneq (A' \cap S) + (B' \cap S)$$

を得る。

最後に, A, B の有限条件 (極大条件, 極小条件) と L の有限条件の関係について述べる。次が key となる補題である。

補題7 ([10, Lemma 7]) $L = A + B$ とする。 H と K が $H \leq K$ なる L の ideals で, $A \cap H = A \cap K$, $B \cap (A + H) = B \cap (A + K)$ ならば, $H = K$ である。

定理8 ([10, Theorem 8]) L を factorized Lie algebra by A and B とする。

(1) Δ を relations $\leq, \triangleleft, \text{si}, \triangleleft^\alpha, \text{asc}$ のいずれかで, $A \Delta L$ とするとき,

$$\begin{aligned} A \in \text{Max-}\triangleleft \text{ (resp. Min-}\triangleleft), B \in \text{Max-}\Delta \text{ (resp. Min-}\Delta) \\ \implies L \in \text{Max-}\triangleleft \text{ (resp. Min-}\triangleleft) \end{aligned}$$

(2) $A \text{ ser } L \in \mathbf{L}\mathfrak{F}$ とする。

$$\begin{aligned} A \in \text{Max-}\triangleleft \text{ (resp. Min-}\triangleleft), B \in \text{Max-ser (resp. Min-ser)} \\ \implies L \in \text{Max-}\triangleleft \text{ (resp. Min-}\triangleleft) \end{aligned}$$

次の系は [3, Lemma 1.2.6] に対応する。

系9 ([10, Corollary 9]) L を factorized Lie algebra by A and B とするとき,

$$A, B \in \text{Max (resp. Min)} \implies L \in \text{Max}-\triangleleft \text{ (resp. Min}-\triangleleft)$$

参考文献

- [1] F.A.M.ALDOSRAY: On subideals of the join of permutable Lie algebras. Arch. Math. **43**, 322-327(1984).
- [2] R.K.AMAYO: Quasi-ideals of Lie algebras I. Proc. London Math. Soc.(3) **33**, 28-36(1976).
- [3] B.Amberg, S.Franciosi and F. de Giovanni: Products of Groups, Oxford, New York 1992.
- [4] M.GOTO: Note on a characterization of solvable Lie algebras. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I **26**, 1-2(1962).
- [5] M.Honda and T.Sakamoto: Lie algebras represented as a sum of two subalgebras, Math. J. Okayama Univ. **42**, 73-81(2000).
- [6] N.ITÔ: Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen. Math. Zeitschr. **63**, 401-404(1955).
- [7] O.H.KEGEL: Produkte nilpotenter Gruppen. Arch. Math. **12**, 90-93(1961).
- [8] V.V.PANYUKOV: On the solubility of Lie algebras of positive characteristic. Russ. Math. Surv. **45**, N 4, 181-182(1990).
- [9] A.P.PETRAVCHUK: Lie algebras decomposable as a sum of an abelian and a nilpotent subalgebra. Ukr. Math. J. **40**, N3, 331-334(1988).
- [10] T.Sakamoto and M.Honda: Some properties of factorized Lie algebras, Bulletin of Fukuoka University of Education **61**, 1-7 (2012).
- [11] H.WIELANDT: Über Produkte nilpotenten Gruppen. Illinois J. Math. **2**, 611-618(1958).