KS_3 の自己同型群 II

首藤武史

概要　A を 3 次対称群 S_3 の体 K 上の群環とするとき，A の自己同型群 $\mathrm{Aut}(A)$ は，K の標数を p とするとき, $p\neq 3$ の場合は多元環 A の直積分解からその形が分かる. 実際, $p\neq 2, 3$ の場合, $\mathrm{Aut}(A) \cong S_2\times\mathrm{PGL}_2(K)$, $p=2$ の場合, $\mathrm{Aut}(A) \cong K^\times\times\mathrm{PGL}_2(K)$ である. $p=3$ の場合には A は直既約であるから，このような形では得られない．K を代数的閉体として，$\mathrm{Aut}(A)$ の代数群としての性質を調べる．既にコンピュータソフトウエアを利用した計算により次のことは分かっていた：$\mathrm{Aut}(A)$ は 4 次元多様体で，2 つの既約成分を持つ．この講演では，この結果をコンピュータに依らずに証明することができたのでその概要を述べる．
また，$\mathrm{Aut}(A)_0$ を $\mathrm{Aut}(A)$ の単位元成分とするとき，次の代数群の完全系列がある：

$$\{1\} \to \mathrm{Int}(A) \to \mathrm{Aut}(A)_0 \to K^\times \to \{1\}.$$

k を K の有限部分体として，k 有理点を考えると，同様の有限群の完全系列を得る．k の位数が 3^m のとき，この完全系列と $\mathrm{Aut}(A)_0$ が指数 2 をもつということから，有限群 $\mathrm{Aut}(kS_3)$ の位数が計算できる．他の場合も上に述べた結果から計算することができ，結果をまとめると，位数 p^m をもつ有限体 k 上の群環 kS_3 の自己同型群の位数は,

$p\neq 2, 3$ の場合，$|\mathrm{Aut}(kS_3)|=2\cdot p^m\cdot(p^{2m}-1)$,

$p=2$ の場合，$|\mathrm{Aut}(kS_3)|=(2^m-1)\cdot 2^m\cdot(2^{2m}-1)$,

$p=3$ の場合，$|\mathrm{Aut}(kS_3)|=2\cdot(3^m-1)^2\cdot 3^{2m}$.