加群の自己同型群と導分環

首藤 武史

1. 初めに

[2] で講演者は次のことを示している：代数的閉体 k 上の有限次元多元環 A の根基 R が 2-nilpotent のとき，A の自己同型群 $\mathrm{Aut}(A)$ のリー環 $\mathrm{L}(\mathrm{Aut}(A))$ は A の R を保つ導分全体のなすリー環 $\mathrm{der}(A)$ に一致する．その証明の方法は，以下に述べる性質をもつ R の 1 次変換のなす幾つかの空間の次元を調べるというものである．

$A = S + R$ を A の Wedderburn 分解とする．S は A の Wedderburn factor (A の半単純部分多元環) である．S および R の基底を併せて A の基底を構成するとき，A の自己同型 σ の表現行列は次のようになる：

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

$\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$ ということから，$\alpha \in \mathrm{Aut}(S)$ で，δ，γ は次の等式をみたす：

(1)　$x, y \in S$ に対して，$\delta(xy) = \alpha(x)\delta(y) + \delta(x)\alpha(y)$,

(2)　$\gamma \in \mathrm{GL}(R)$で，$x \in S$，$u \in R$ に対して，$\gamma(xu) = \alpha(x)\gamma(u)$，$\gamma(ux) = \gamma(u)\alpha(x)$.

A の導分 D で R を保つものも同様に

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ \delta & \Delta \end{pmatrix}$$

と表すことができる．このとき，$d \in \mathrm{Der}(S)$ で，δ，Δ は次の等式をみたす：

(3)　$x, y \in S$ に対して，$\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$,

(4)　$x \in S$，$u \in R$ に対して，$\Delta(xu) = x\Delta(u) + d(x)u$，$\Delta(ux) = \Delta(u)x + ud(x)$.

R は S-S 両側加群で，(1)〜(4) はその上の作用であるが，S の包絡環 $S^e = S \otimes S^\circ$ を考えると，これらはすべて左 S^e 加群上の作用で表される．これらを一般化して考える．

2. α 自己同型と d 導分

k を任意の体，A を k 上の有限次元多元環，M を左 A 加群とする．$\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ に対して M に新しい A 加群の構造が決まる：

$$x \in A,\ m \in M \text{ に対して，} x \cdot m = \alpha(x)m$$

このようにして決まる A 加群を M^{α} で表す．単に M と書くときは初めに与えられた A 加群を表す．すなわち，$M^{id} = M$ である．

M の正則な 1 次変換 γ が M から M^{α} への A 加群としての同型であるとき，これを M の **α 自己同型**と呼ぶ．すなわち，任意の $x \in A$，$m \in M$ に対して，

$$\gamma(xm) = \alpha(x)\gamma(m)$$

が成り立つこと． 従って，§1, (2) は γ が S 加群 R の α 自己同型であることを示している．

A の導分 d に対して，M の 1 次変換 δ が，$x \in A$，$m \in M$ に対して

$$\delta(xm) = d(x)m + x\delta(m)$$

を満たすとき，δ を M の ***d* 導分**と呼ぶ．従って，§1, (4) は Δ が R の d 導分であることを示している．

命題１． M は忠実な A 加群とする．したがって $A \subset \mathrm{E}(M)$ とみなす．

(1) γ が M の α 自己同型であれば，$\alpha(x) = \gamma x \gamma^{-1}$ $(x \in A)$.

(2) δ が M の d 導分であれば，$d(x) = [\delta, x]\ (= \delta x - x\delta)$ $(x \in A)$.

3. Normalizers, Centralizers

命題1はAのある種の自己同型 [resp. 導分] が E(M) の内部自己同型 [resp. 内部導分] から引き起こされることを示している．そこで A の‘正規化’を考える．

M を有限次元ベクトル空間とし，$G = \mathrm{GL}(M)$，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(M)$ とする．部分多元環 $A \subset \mathrm{E}(M)$ に対して，

$$\mathrm{N}_G(A) = \{\gamma \in G \mid \gamma A \gamma^{-1} = A\},$$

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A) = \{\delta \in \mathfrak{g} \mid [\delta, A] \subset A\}$$

とおく．このとき，命題 1 より群の準同型 ω およびリー環の準同型 ω_*を得る：

$$\omega : \mathrm{N}_G(A) \longrightarrow \mathrm{Aut}(A),\ \ \gamma \mapsto \mathrm{Int}(\gamma)|_A,$$

$$\omega_* : \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A) \longrightarrow \mathrm{Der}(A),\ \ \delta \mapsto \mathrm{int}(\delta)|_A$$

これらの像，核をそれぞれ Aut(A; M)，$\mathrm{C}_G(A)$，Der(A; M)，$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A)$ とおく．従って次の完全系列を得る：

(A) $$1 \longrightarrow \mathrm{C}_G(A) \longrightarrow \mathrm{N}_G(A) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A;M) \longrightarrow 1$$

(B) $$0 \longrightarrow \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A) \longrightarrow \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A) \xrightarrow{\omega_*} \mathrm{Der}(A;M) \longrightarrow 0.$$

Aut(A; M), Der(A; M) に関して，次のことが分かる．

命題 2. M が A の (左) 正則表現のとき，Aut(A; M) = Aut(A), Der(A; M) = Der(A). 従って，A の自己同型はすべて E(A) の内部自己同型から引き起こされ，A の導分はすべて E(A) の内部導分から引き起こされる．

例 3. A が 1 つのべき零元から生成されているとする．このとき，任意の (忠実な) A 加群 M に対して Aut(A; M)＝Aut(A) が成り立つ．しかし，Der(A; M)＝Der(A) は成り立たない場合がある．

H を Aut(A; M) の部分群とし，$\Gamma(H)＝\omega^{-1}(H)$ とおけば，次の系列は群の完全系列である：

(a) $$1 \longrightarrow \mathrm{C}_G(A) \longrightarrow \Gamma(H) \xrightarrow{\omega} H \longrightarrow 1.$$

L を Der(A; M) の部分リー環とし，$\Delta(L)＝\omega_*^{-1}(L)$ とおけば，リー環の完全系列を得る：

(b) $$0 \longrightarrow \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A) \longrightarrow \Delta(L) \xrightarrow{\omega_*} L \longrightarrow 0.$$

4. 代数群とリー環

この節では基礎体は代数的閉体とする．このとき，系列 (A) は代数群と準同型の完全系列である．また，H が Aut(A; M) の閉部分群のとき，系列 (a) も代数群と準同型の完全系列である．リー環と準同型の微分を考えると次のリー環の完全系列を得る：

(C’) $$0 \longrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{C}_G(A)) \longrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{N}_G(A)) \xrightarrow{d\omega} \mathrm{L}(\mathrm{Aut}(A;M))$$

(c’) $$0 \longrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{C}_G(A)) \longrightarrow \mathrm{L}(\Gamma(H)) \xrightarrow{d\omega} \mathrm{L}(H)$$

(c’) における $d\omega$ は (C) での $d\omega$ の L($\Gamma(H)$) への制限写像である．

代数群の表現の一般論より $L(N_G(A)) \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A)$ で，$d\omega$ は ω_* の $L(N_G(A))$ への制限写像である．

Remark. 基礎体の標数が 0 の場合には $N_G(A)$ のリー環は $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A)$ であることが分かる ([1], §13)．この場合には，$L(\mathrm{Aut}(A; M)) = \mathrm{Der}(A: M)$ が成り立つ．正標数の場合には一般に成り立たない．

例 4. 基礎体 k の標数は 3 であるとする．$A = k[X]/(X^3) = k[x]$ を考える．A の正則表現は忠実で，$1, x, x^2$ を基底に選ぶと，x, x^2 の表現行列はそれぞれ

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. 正規化群 $N_G(A)$ および中心化群 $C_G(A)$ を計算すると, $\dim N_G(A) = 5$, $\dim C_G(A) = 3$ を得る．

一方，正規化環 $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A)$，中心化環 $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A)$ は $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A) = 6$，$\dim \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A) = 3$.
$\dim L(N_G(A)) = 5$ であるから，

$$L(N_G(A)) \subsetneq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A)$$

となっている．

命題 5. $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A)$ は $E(M)$ の部分多元環で，この可逆元全体のなす群が $C_G(A)$ である．とくに，$L(C_G(A)) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A)$.

(a) の完全性より，$C_G(A) = \mathrm{Ker}\,\omega$，$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A) = \mathrm{Ker}\,\omega_*$ であるから ω は分離的で，従って (c') での $d\omega$ は surjective である．とくに，(C') における $d\omega$ も surjective である．

これまでに得られた 6 個の完全系列を再掲する：

$$\begin{array}{llcccccc}
\text{(A)} & 1 \longrightarrow & C_G(A) & \longrightarrow & N_G(A) & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Aut}(A; M) & \longrightarrow 1 \\
\text{(B)} & 0 \longrightarrow & \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A) & \longrightarrow & \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A) & \xrightarrow{\omega_*} & \mathrm{Der}(A; M) & \longrightarrow 0. \\
 & & \| & & \cup & & \cup & \\
\text{(C)} & 0 \longrightarrow & L(C_G(A)) & \longrightarrow & L(N_G(A)) & \xrightarrow{d\omega} & L(\mathrm{Aut}(A; M)) & \longrightarrow 1
\end{array}$$

(a) $$1 \longrightarrow C_G(A) \longrightarrow \mathit{\Gamma}(H) \xrightarrow{\omega} H \longrightarrow 1.$$

(b) $$0 \longrightarrow \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(A) \longrightarrow \mathit{\Delta}(L) \xrightarrow{\omega_*} L \longrightarrow 0.$$

(c) $$0 \longrightarrow \mathrm{L}(C_G(A)) \longrightarrow \mathrm{L}(\mathit{\Gamma}(H)) \xrightarrow{d\omega} \mathrm{L}(H) \longrightarrow 0$$

定理 6. H を $\mathrm{Aut}(A{:}\ M)$ の閉部分群，L を $\mathrm{Der}(A{:}\ M)$ の部分リー環とする．このとき，$\mathrm{L}(\mathit{\Gamma}(H)) = \mathit{\Delta}(L)$ であるための必要十分条件は $L = \mathrm{L}(H)$ であることである．

系 7. A の自己同型群 $\mathrm{Aut}(A)$ が連結であるための必要十分条件は，A を正則表現によって $\mathrm{E}(A)$ の部分多元環とみなすとき，$\mathrm{GL}(A)$ における $A^\times$ の正規化群が連結であることである．

参考文献

[1] Humphreys, J.E.：Linear Algebraic Groups, GTM **21**, Springer-Verlag, 1975.

[2] 首藤武史：Radical が 2-nilpotent である多元環の自己同型群と導分環，preprint.