

Taylorの定理について

吉井 洋二

秋田高等専門学校

大抵の本はいきなり証明し、何故この x の多項式 (テイラー多項式)

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

が現れるか、その理由を説明していない。

Taylorの定理

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

となる c が x と a の間に存在する。

$x = a$ の近くで $f(x)$ を多項式 $p(x)$ で近似しよう！

誤差を $\varepsilon(x) := f(x) - p(x)$ とおく。

このとき、条件

$$\varepsilon(a) = \varepsilon'(a) = \dots = \varepsilon^{(n)}(a) = 0$$

(これを重解条件と呼ぼう！)と「 $p(x)$ がテイラー多項式であること」は同値である。

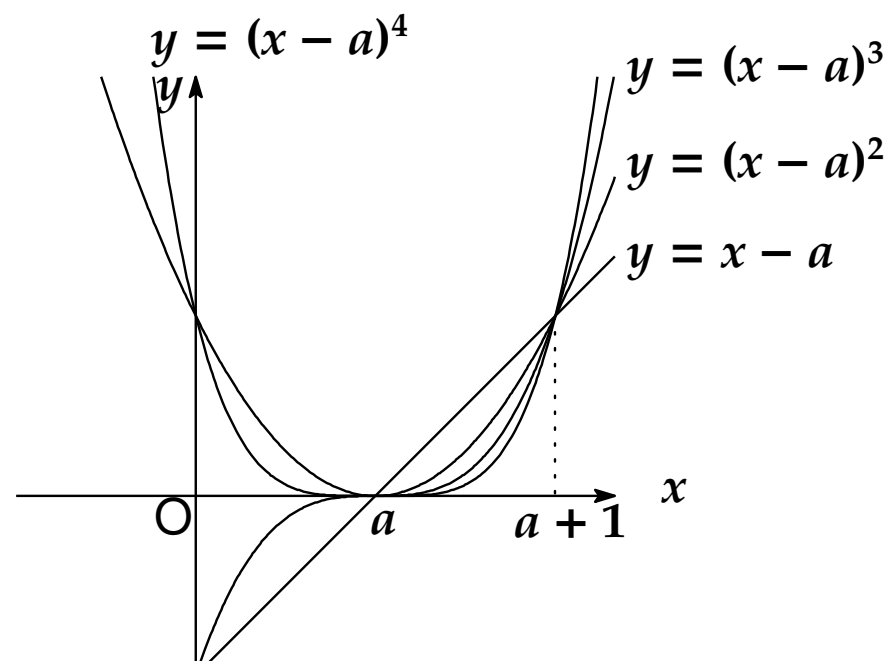
なぜ重解条件と名付けたか？

$f(x)$ が C^{n+1} クラスならば、

重解条件 $\iff$

$\varepsilon(x) = (x - a)^{n+1}g(x)$ となる

連続関数 $g(x)$ が存在する。



テイラーの定理とは、

$$g(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

となる c が x と a の間に存在することを主張したものである。重解定理を導くには $f(x) \in C^{n+1}$ である必要があるが、テイラーの定理は $(n+1)$ 回微分可能であれば成り立つ。さらに、高木貞治「解析概論」

等を見ればわかるように、 **n 回微分可能を仮定するだけで**（詳しくは、 $x = a$ の近傍で $f(x)$ は $(n-1)$ 回微分可能で、 $f^{(n-1)}(x)$ が $x = a$ で微分可能ならよい）、
 $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots$
 $\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o(x - a)^n$
が成り立つ（**無限小型のテイラーの定理**）。

$$\textcircled{1} \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + g(x)(x-a)^{n+1}$$

(注2) 誤差関数 (ラグランジュの剰余項) が0に収束、即ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$$

となる範囲で $f(x)$ はテイラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \\ + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

可能となる。べき級数の理論から、そ

(注1)

$$\varepsilon(x) = x^{n+1} \sin \frac{1}{x}$$

は $o(x^n)$ であり、

$$\varepsilon(0) = \varepsilon'(0) = \cdots = \varepsilon^{(n)}(0) = 0$$

と定義しておけば C^n クラスでもある。

ところが $\frac{\varepsilon(x)}{x^{n+1}}$ は連続関数ではない。

の範囲は、ある正数 R に対して、 $a - R$ から $a + R$ までのすべての x となる。(この R を収束半径と呼ぶ。 R は無限大のこともある。)

(例1) $f(x) = e^x$ で $a = 0$ なら

$f^{(n+1)}(c) = e^c$ より、すべての x で

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ となるから、収束半

径は無限大である。よってすべての x で

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ が成り立つ。

(例3) $f(x) = \log(1+x)$ で $a = 0$ なら

$f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}$ より、

$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$ となり、こ
れは $0 \leq x < 1$ で 0 に収束、さらに $x > 1$
で発散するから収束半径は 1 である。

$x = 1$ でも 0 に収束するから、

$-1 < x \leq 1$ の範囲で、

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ が成り立

(例2) $f(x) = \sin x$ で $a = 0$ なら

$f^{(2k)}(c) = (-1)^k \sin c$ または

$f^{(2k+1)}(c) = (-1)^k \cos c$ より、すべての x

で $\left| \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \rightarrow 0$ となるから、

収束半径は無限大である。よってすべて

の x で $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ が成り

立つ。

つ。特に $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ となる。

(注3) ラグランジュの剰余項

$\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$ が、 $-1 < x < 0$ で 0 に収束するかどうか分からない。 $(x = -1$ や $|x| > 1$ で発散することは、ロピタルの定理を使えばわかる。あるいはテイラー級数の一般項が 0 に収束しないことを示してもよい。)

コーシーの剰余項

$$\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-a))}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

を使えば、この場合は、

$$\frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} (1-\theta)^n x^{n+1} \text{ となるから、}$$

$0 < 1-\theta < 1+\theta x$ を使ってわかる。

ベルヌーイの剰余項

$\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ を使ってもわかる。

(注4) $f(x)$ が無限回微分可能なとき、
剰余項 $R_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

$\iff$

テイラー級数が $x = a$ 以外で収束

$\iff$ べき級数展開可能 (収束半径正)

が成り立つわけだが、念のため、2つめの $\Leftarrow$ を示しておく。まず $f(x)$ を $x = a$ の周りでべき級数展開する：

ただ、

ダランベールの ratio test :

べき級数 $\sum a_n(x-a)^n$ の収束半径 R は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$$

を使えばすぐに収束半径が1とわかる。

$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$
(仮定より収束半径は正)

この級数は収束半径内で項別微分可能だから、 $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ が成り立つ。従って収束半径内で $f(x) =$

$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$
即ちテイラー展開を得る。従ってもちろんテイラー級数は収束する。

念のため、1つめの $\Leftarrow$ を示しておく。
 テイラー級数が a 以外で収束すれば、
 $f(x)$ はべき級数展開を持つことになるので、上の議論より $f(x)$ はテイラー展開可能となる。即ち、剰余項は0に収束しなければならない。

但し、 $k!! =$

$$k(k-2)(k-4)\cdots \begin{cases} 2 & (k=2m) \\ 1 & (k=2m+1) \end{cases}$$

さらに、一般化して

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(nk-n-1)!^n}{(kn)!^n} x^k$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{n}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(kn-n+1)!^n}{(kn)!^n} x^k$$

$$(例4) (1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} {}_a C_k x^k, \quad |x| < 1$$

たとえば $\sqrt{1+x}$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k, \quad |x| \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \\ -1 < x \leq 1$$

但し、 $k!^n = k(k-n)(k-2n)\cdots$

$$\dots \begin{cases} n & (k \equiv 0 \pmod{n}) \\ n-1 & (k \equiv n-1 \pmod{n}) \\ n-2 & (k \equiv n-2 \pmod{n}) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (k \equiv 1 \pmod{n}) \end{cases}$$

(例5)

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, |x| \leq 1$$

$x = 1$ のとき、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(例6)

$$\arcsin x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$
$$|x| \leq 1$$

$x = 1$ のとき、

$$\pi = 2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{5}{7 \cdot 8} + \cdots$$

(例7)

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2^{2k} - 4^{2k}) x^{2k-1}$$

$|x| < \frac{\pi}{2}$, 但し B_n は Bernoulli 数

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n+1}C_k B_k$$

収束半径は、評価式

$$|B_n| \leq \frac{4 \cdot n!}{(2\pi)^n}$$

を使って証明できる。

問題 $f(x) = (x-a)^n g(x)$ で、
 $f(x) \in C^\infty$, さらに $g(x)$ が連続ならば
 $g(x)$ は微分可能か？