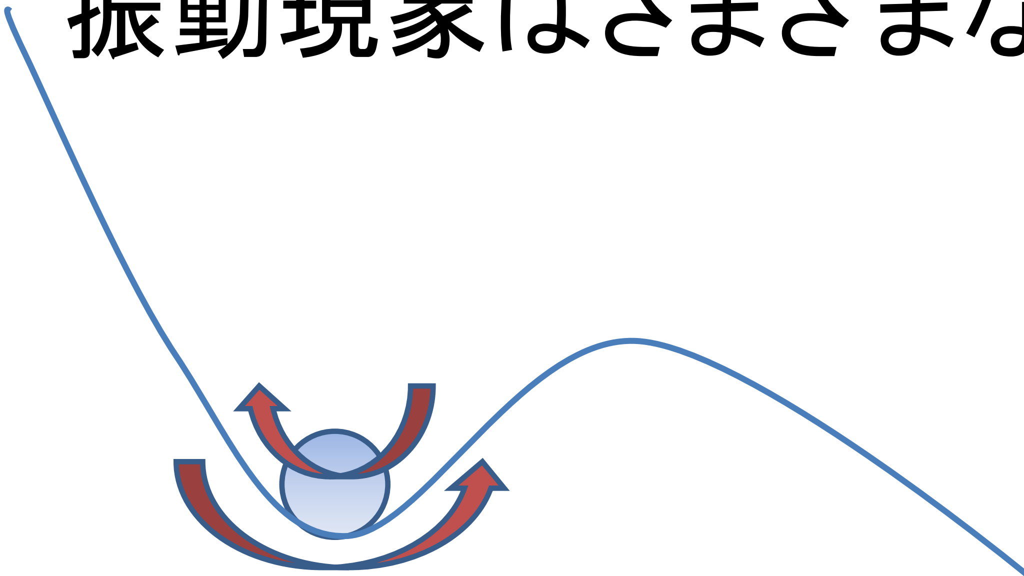
2011 年 3 月25日　数学教材研究会＠秋田高専

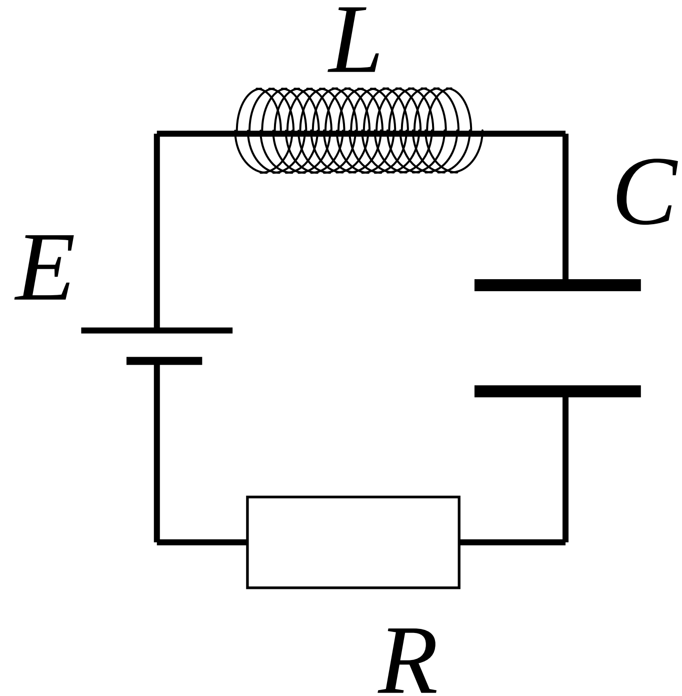
振動現象と微分方程式

秋田高専　自然科学系　　上田　学

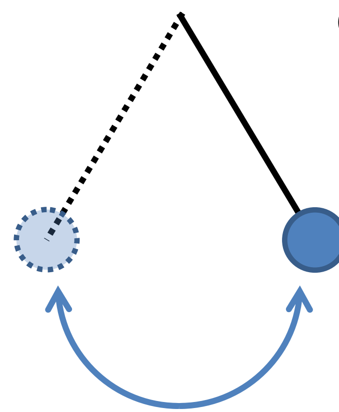
振動現象はさまざまなところに現れる!



ポテンシャルエネルギー
極小点における微小振動



○ 直列 RLC 回路



○ ブランコ

安定な平衡点で,
復元作用と慣性とが競合して
振動が生じる。

秋田高専 4 学年「現代応用物理学」

授業の目標と概要

工学一般の基礎となる物理学の力学・電磁気学分野について，適切なイメージと数式によってその概念と法則を正確に理解する。物理学を実際的な問題の発見と解決に応用できる力を養成することを目標とする。

到達目標

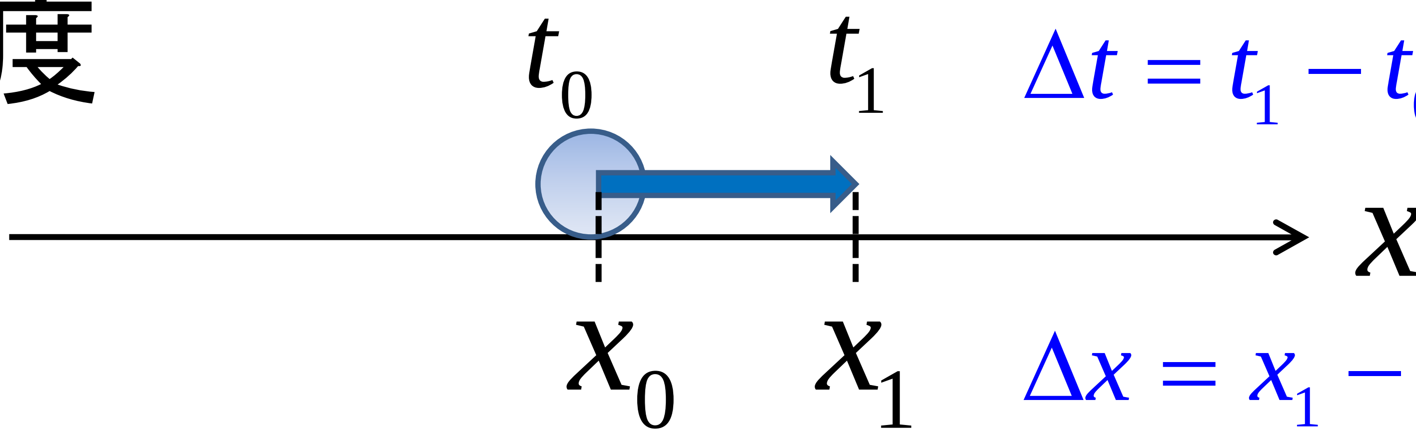
質点や剛体の運動をベクトルや微積分を用いて記述できる。電場および磁場をイメージできるとともに，数式でも表現できる。また，簡単な系での電場と磁場を計算することができる。

授業内容

― 前期は質点の運動 ―

授業項目	時間	内容
速度と加速度	3	速度・加速度と微積分の関係を理解できる
力と運動	4	微積分を用いて，質点の運動を記述できる
振動	**6**	**単振動・減衰振動と微分方程式の関係を理解できる**
前期中間試験		
仕事とエネルギー	5	保存力と位置エネルギーを理解できる
力学的エネルギー保存則	4	力学的エネルギー保存則を理解し，質点の運動に応用できる
角運動量	4	質点の角運動量を理解できる
前期末試験		

速度



$$\Delta t = t_1 - t_0$$

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

定義：　単位時間あたりの位置の変化

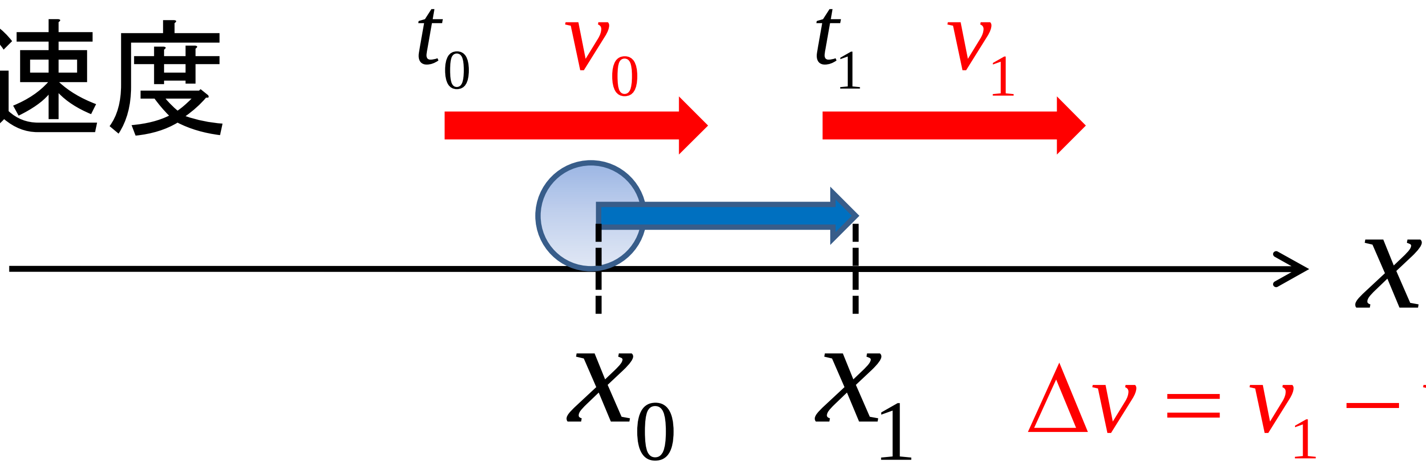
Δｔの時間の間に
Δｘ位置が変化

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

瞬間の速度

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

加速度



$$\Delta v = v_1 - v_0$$

定義：　単位時間あたりの速度の変化

Δｔ の時間の間に
Δｖ速度が変化

$$v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

瞬間の加速度

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

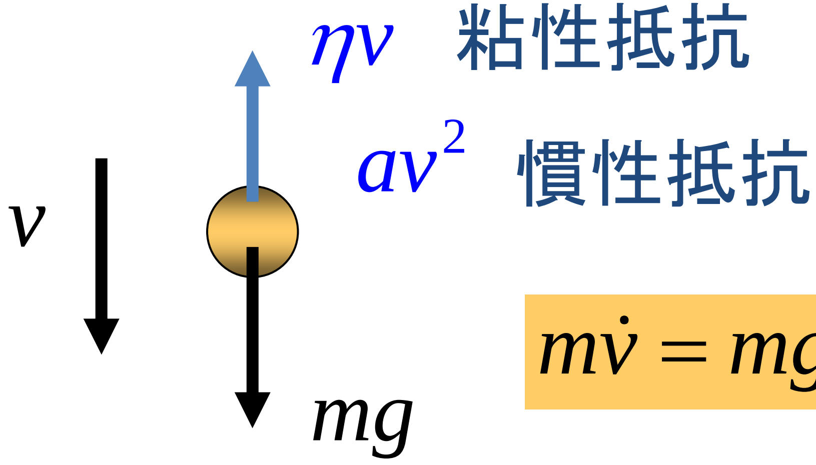
運動と力

1. 運動方程式
2. 放物運動
3. 流体中の落下
(粘性抵抗または
 慣性抵抗)

「振動」における教授項目

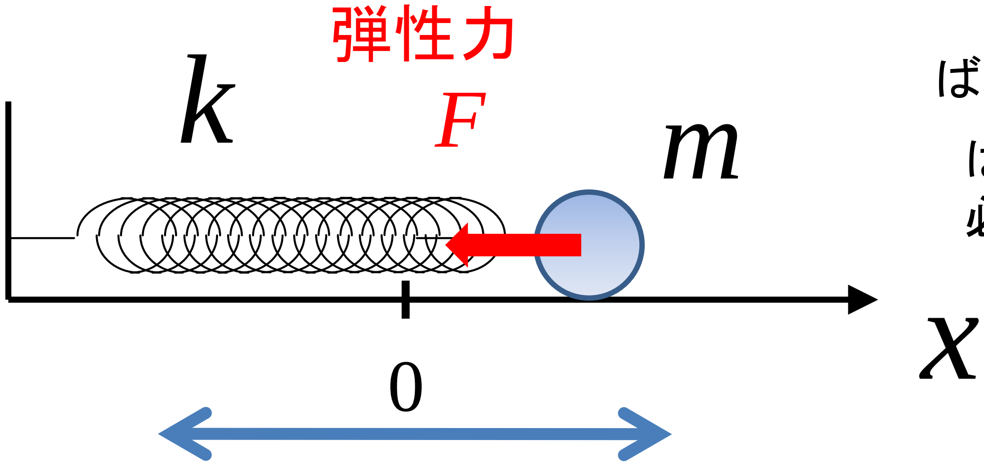
1. ばねの単振動 Ⅰ (水平方向)
2. ばねの単振動 Ⅱ (鉛直方向)
3. 単振子
4. 減衰振動
5. 強制振動

微分方程式を解く



$$m\dot{v} = mg - av$$

1. 単振動 I



ばね定数 (弾性定数)　k

ばねを単位長さあたり伸ばすのに必要な力の大きさ

Newton の運動方程式
(Newton’s Eq. of Motion)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

単振動について低学年 (2学年) で習うこと

単振動は
等速円運動の影

○ 変位の時間変化は三角関数

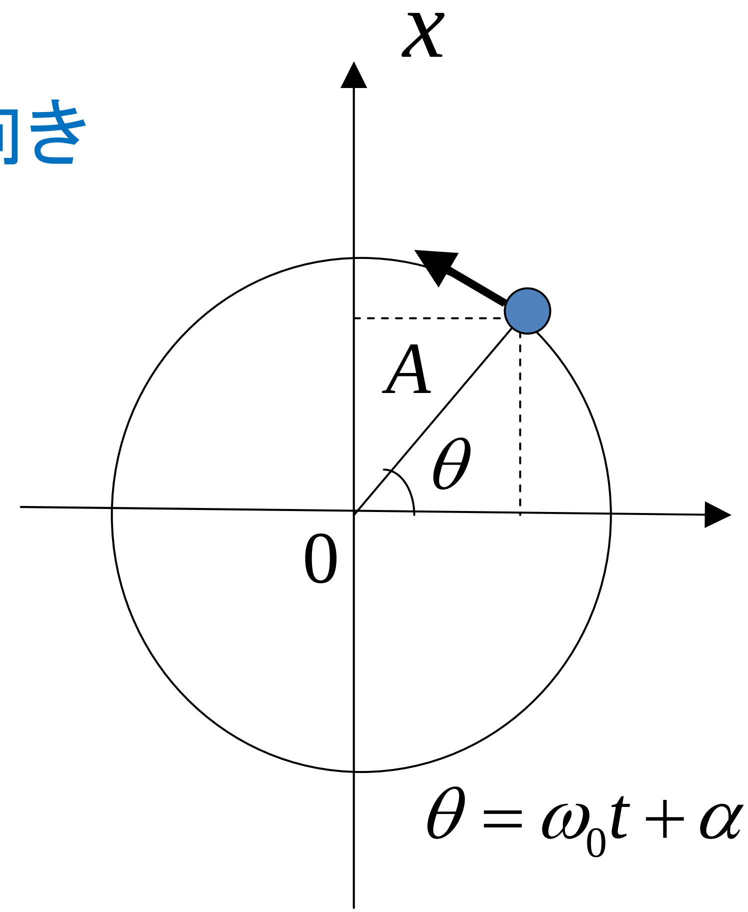
$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$$

○ 加速度が変位に比例し，反対向き

○ 変位にかかる係数により
周期 T が決まる

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega_0^2 x$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ 固有角振動数



斉次線形2階微分方程式 (DE) の解き方

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0$$

① 特解を $x = e^{\lambda t}$ とし，DE に代入

t についての恒等式　$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right)e^{\lambda t} = 0$

特性方程式

⇨ $$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \lambda_\pm$$

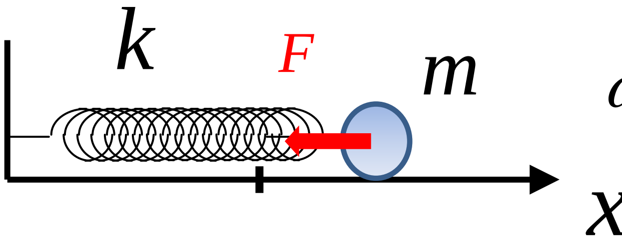
② 一般解を 2 つの独立な特解の線形結合とする

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

③ 任意の定数 C_1, C_2 は初期条件等より決定する

単振動における一般解の 3 つの表式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

特解 $x = e^{\lambda t}$

$$\left(\lambda^2 + \omega_0^2\right) e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i\omega_0$$

一般解 その1

$$x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

2つの
独立な解

C1 と C2 は任意の定数とする

オイラーの公式 (Euler’s formula)

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$$x(t) = (C_1 + C_2)\cos\omega_0 t + i(C_1 - C_2)\sin\omega_0 t$$

物理量が実数の場合これが便利

一般解 その2

$$x(t) = a_1 \sin\omega_0 t + a_2 \cos\omega_0 t$$

a_1 と a_2 は任意の定数とする

三角関数の合成

$$x(t)=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\left\{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\sin\omega_0 t+\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\cos\omega_0 t\right\}$$

$$=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\left\{\sin\omega_0 t\cos\alpha+\cos\omega_0 t\sin\alpha\right\}$$

明らかな単振動の場合，応用が利かない

一般解 その３

$$x(t)=A\sin\left(\omega_0 t+\alpha\right)$$

A と α は
任意の定数とする

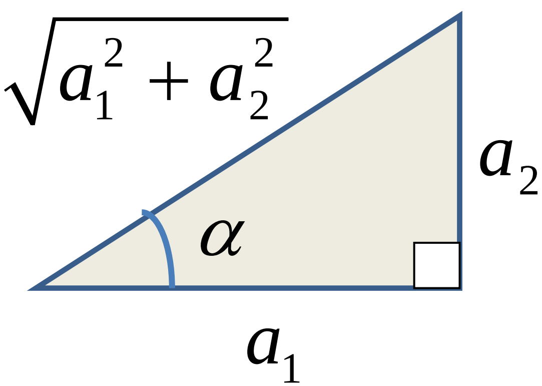
振幅

$$A=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

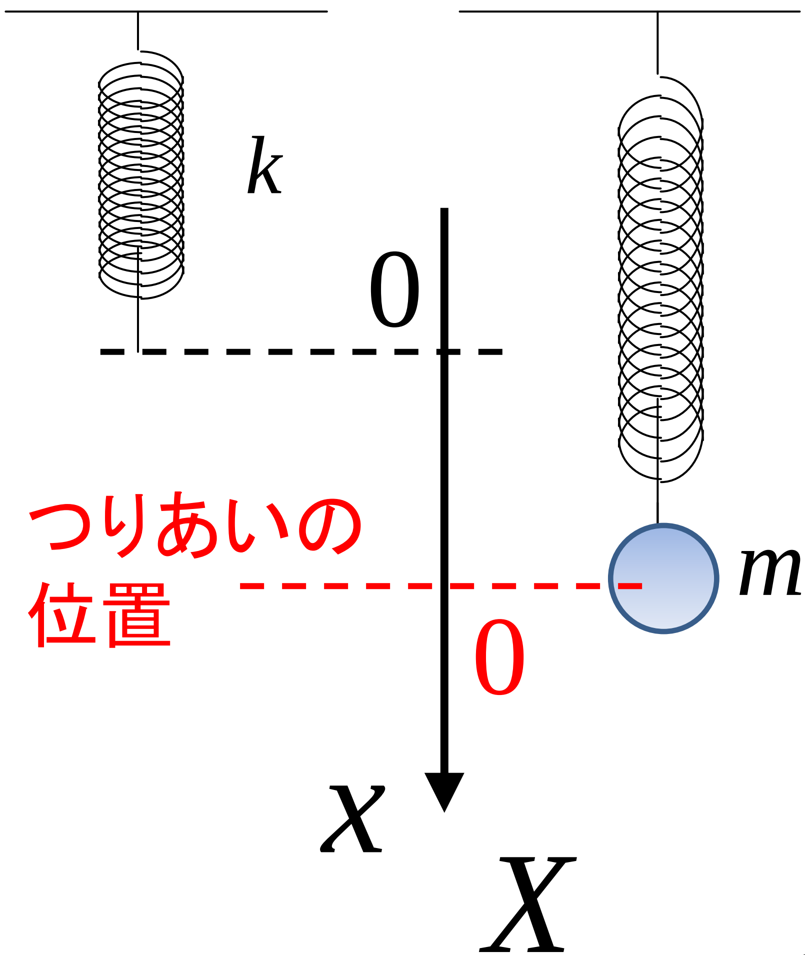
初期位相

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{a_2}{a_1}$$

$$\left(-\pi\leq\alpha\leq\pi\right)$$



2. 鉛直方向での単振動



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg$$

$$= -k\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

$$X = x - \frac{mg}{k}$$

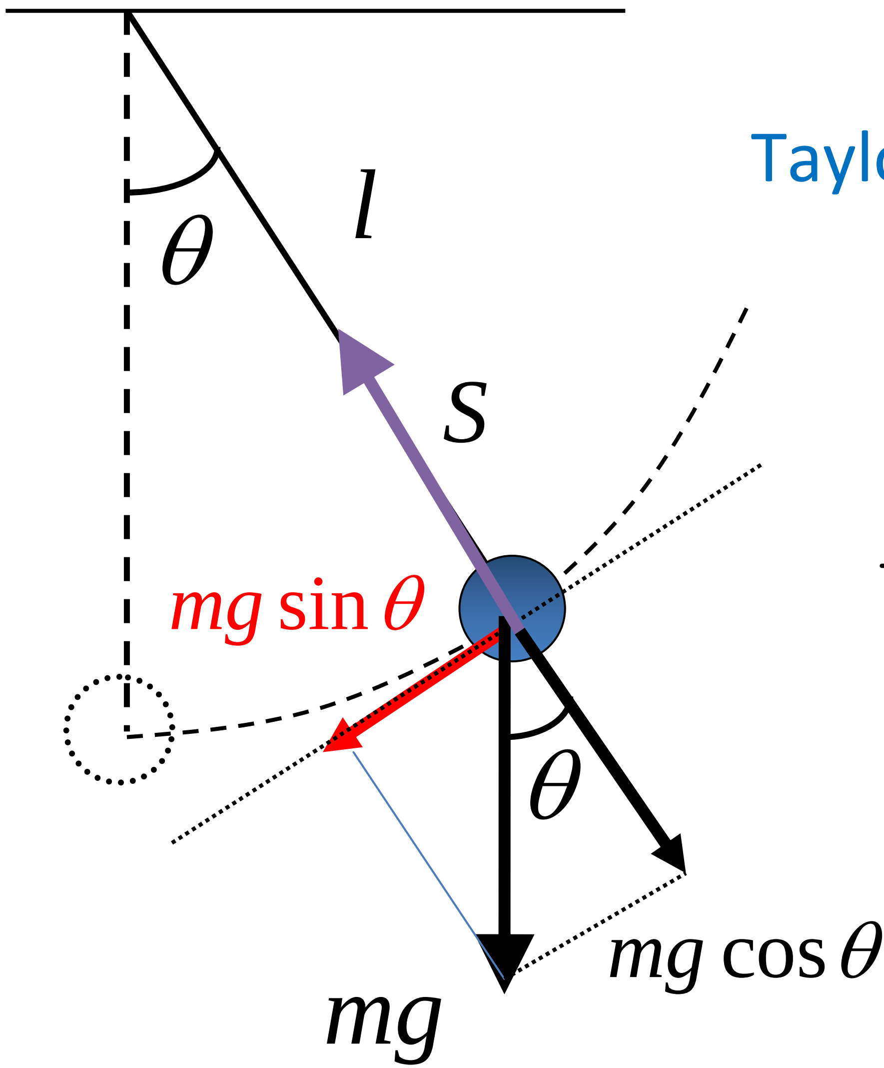
非斉次項

$$\cancel{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg}$$

3. 単振子

Newton の EoM　極座標の利用

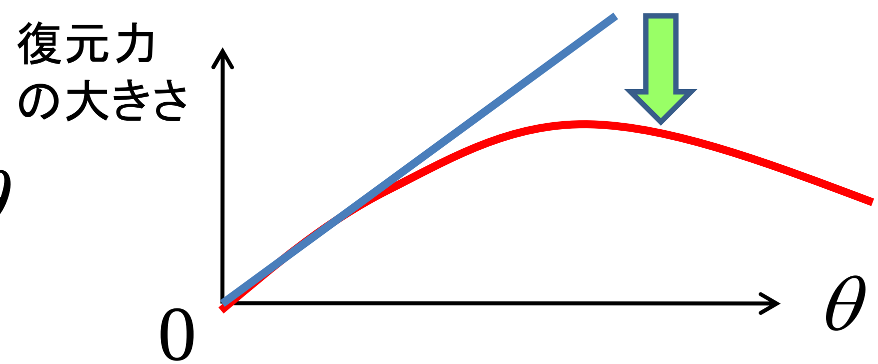
$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$



Taylor 展開と微小振動

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \approx -\frac{g}{l}\theta$$

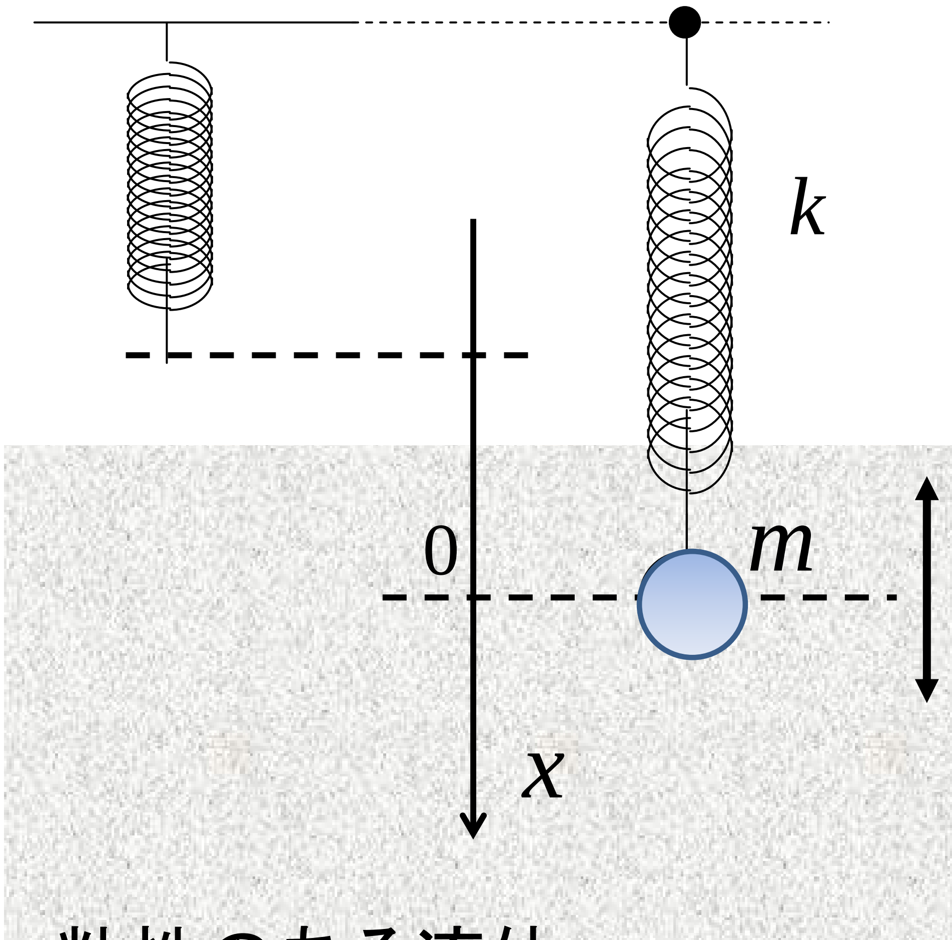


減衰振動

粘性抵抗

速さに比例する抵抗力

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}$$



粘性のある流体

EoM

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-kx}_{\text{復元力}} \underbrace{- 2m\gamma\frac{dx}{dt}}_{\text{抵抗力}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

固有角振動数 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

粘性抵抗がある場合の振動

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

① 特解を $x = e^{\lambda t}$ とし，DE に代入

特性方程式

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

γ 抵抗力と ω_0 復元力のどちらが大きいかで運動が変わる!

$\gamma < \omega_0$　減衰振動 (不足減衰)

$\gamma = \omega_0$　臨界減衰

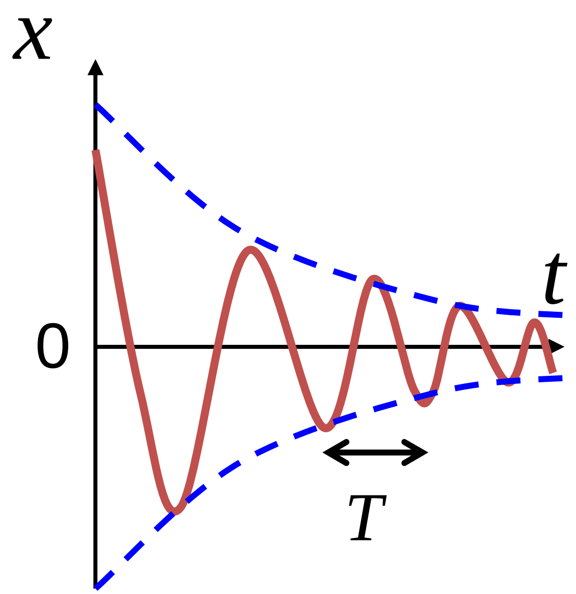
解き方が変わる!

$\gamma > \omega_0$　過減衰 (over-damping)

減衰振動 $\gamma < \omega_0$

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\omega$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$



② 一般解を 2 つの特解の線形結合とする

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

$$= e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$$

$$= Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$> T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

振幅が時間とともに減衰し，周期は抵抗がない場合と比べて長くなる

過減衰

$$\gamma > \omega_0$$

$$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma$$

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm q$$

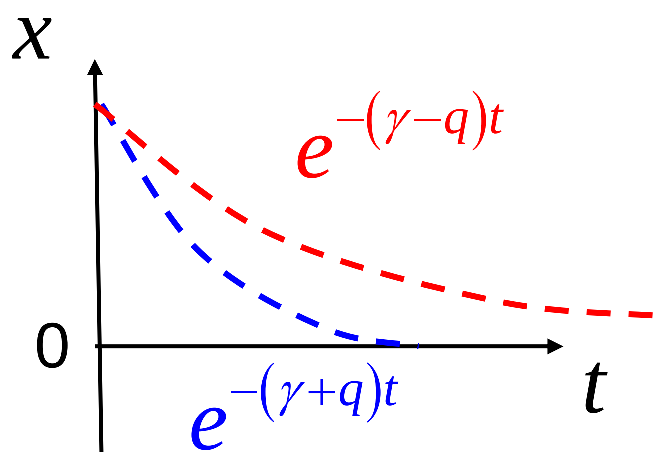
②一般解を2つの特解の線形結合とする

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

$$= C_1 e^{-(\gamma - q)t}$$ 主要項

$$+ C_2 e^{-(\gamma + q)t}$$

速やかに消える



1回も振動せず，止まってしまう。

臨界減衰

$$\gamma = \omega_0$$

$$\lambda_{\pm} = -\gamma$$

~~② 一般解を 2 つの特解の線形結合とする~~

②' 定数変化法を利用
(非斉次 DE にも有効)

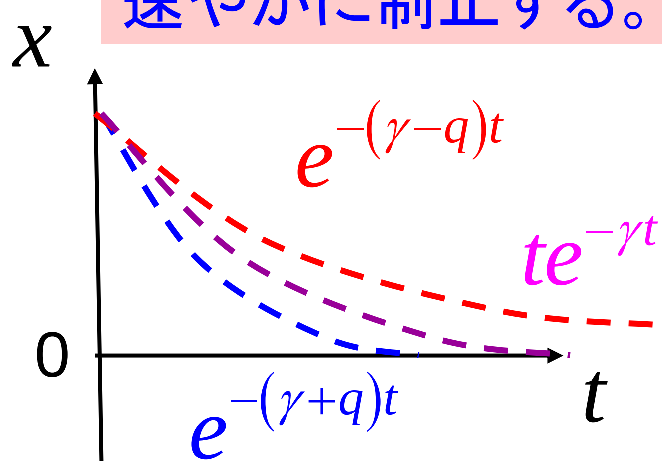
$$x(t) = Ce^{-\gamma t} = C(t)e^{-\gamma t}$$

$$\frac{d^2C}{dt^2} = 0 \Rightarrow C(t) = C_1 t + C_2$$

$$x(t) = C_1 te^{-\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t}$$

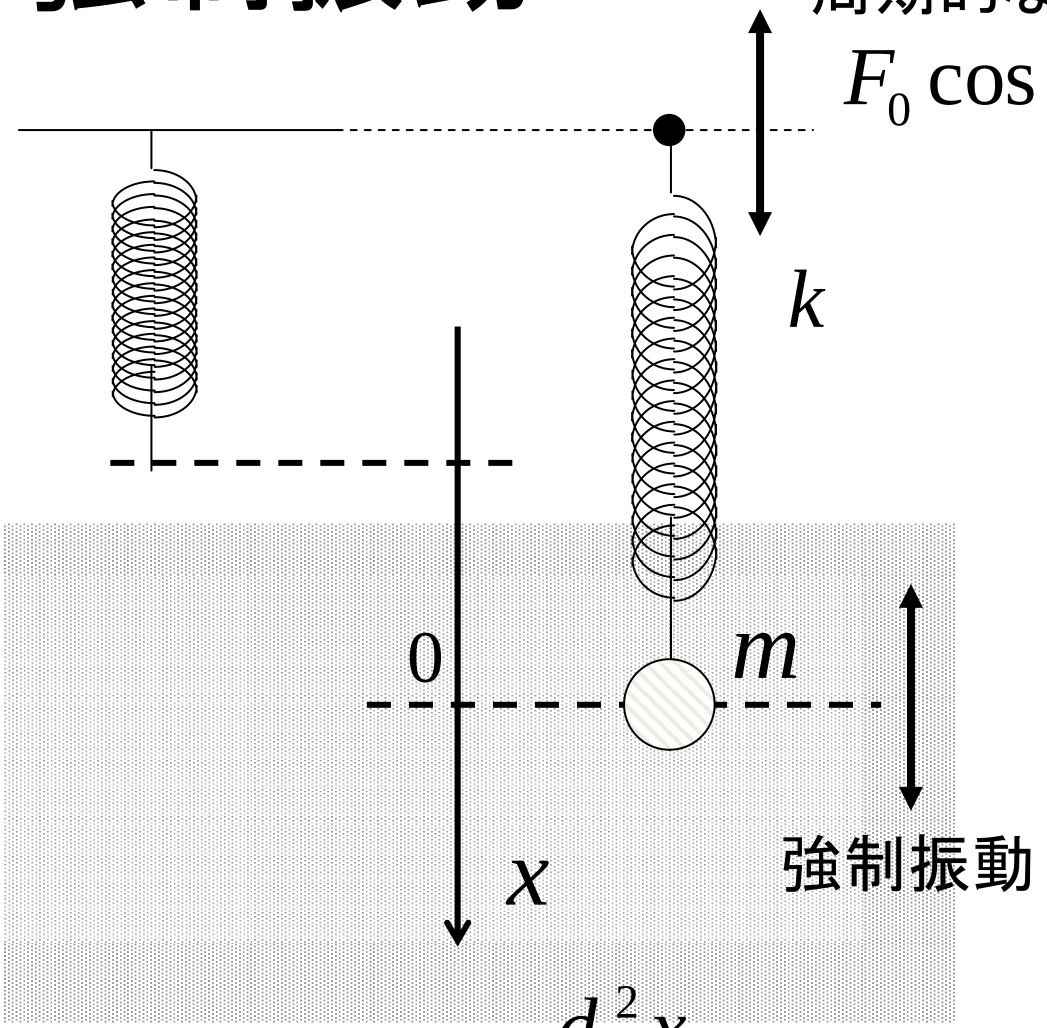
C1 と C2 は任意の定数とする

過減衰よりも
速やかに制止する。



計測器の指針,
ドアなどへの利用

強制振動



非斉次微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma\frac{dx}{dt} + mf_0 \cos \Omega t$$

強制振動の運動方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

一般解 = (斉次方程式の一般解) + (特殊解)

減衰振動 ⇒ 速やかに消失

複素数を利用

$$z = x + iy$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\Omega t}$$

特殊解は振動解!　$z = z_0 e^{i\Omega t}$

$$\left(-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2\right) z_0 e^{i\Omega t} = f_0 e^{i\Omega t} \qquad z_0 = \frac{f_0}{-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2}$$

$$z_0 = \frac{f_0}{-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2} = |z_0| e^{i\alpha}$$

位相 α の出現

振幅 $$|z_0| = \sqrt{z_0^* z_0}$$

複素共役の利用

$$|z_0| = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$$

共振

分母が最小になるような
振動数において，振幅が
大きく増大する現象

複素数を導入することで計算がかなり楽になる

まとめ

○ 振動現象を微分方程式を用いて記述した。

すっきり？　分からない？

○ 数学との用語や方法の一貫性が必要

数学・物理が統合した科目？

○ JABEE WG「学習・教育目標ごとの科目間連携」

学習・教育目標 B-1

「数学，自然科学，および情報技術に関する基本的知識を習得できる」

応用解析Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ，　現代応用物理学，　応用数学，　量子力学，
熱・統計力学，　応用化学，　情報技術