

新種の多項式について

秋田工業高等専門学校

吉井 洋二

平成 24 年 8 月 24 日 (金) 16:00 – 16:45

山口大学吉田キャンパス (山口市) 大学会館会議室 (2 階) にて

数の拡大

Real numbers $\mathbb{R}$ (Greek Math, — 19 C. Bolzano, Cauchy, Abel, etc.)

Complex numbers $\mathbb{C}$ (16 C., Cardano, Tartaglia, 18 C., Euler, 1799, Gauss),

Hamilton numbers $\mathbb{H}$ (1843, Hamilton),

Cayley numbers $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ (1844, Cayley-Graves),

これらは **composition 代数**、即ち

$$N(xy) = N(x)N(y)$$

を満たす非退化 2 次形式 N をもつ代数である。

1898 年、Hurwitz は composition 代数の次元は 1, 2, 4, 8 に限ることを示した。

composition 代数は交代則 (alternative law) を満たす:

$$x(xy) = x^2y \quad \text{and} \quad (yx)x = yx^2$$

以来、**交代代数** (alternative algebra) の一般論も研究される。

ジョルダン代数 (1932, Jordan) とは、ジョルダンの等式

$$x^2(xy) = x(x^2y)$$

を満たす**可換**代数である。たとえば n 次エルミート行列全体 $H_n(\mathbb{C})$ は、行列の積について閉じていないが、新しい積を

$$x \cdot y := \frac{1}{2}(xy + yx)$$

と定義すれば、 $H_n(\mathbb{C})$ はジョルダン代数となる。

また、9次元のジョルダン代数 $H_3(\mathbb{C})$ を含む、27次元の**単純例外ジョルダン代数**

$$\mathbb{A} = H_3(\mathbb{O}) \quad (1934, \text{Jordan-von-Neumann-Wigner, Albert})$$

は Lie Theory や数理物理学等に影響を与えている。

1978年 Allison は、これらをさらに発展させて **structurable 代数** を定義した。
これは、交代代数やジョルダン代数を含み、さらに

$$\begin{aligned} & \mathbb{H} \otimes \mathbb{O} \quad \text{や} \quad \mathbb{O} \otimes \mathbb{O} \quad \text{あるいは} \\ & \mathbb{O}' = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\sqrt{j} \quad (\text{quartic octonion}) \quad \text{や} \\ & \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{A} \\ \mathbb{A} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad (1963, \text{56-dimensional split Brown algebra}) \end{aligned}$$

なども含むクラスである。

Allison は、標数 0 の有限次元単純リー環を structurable 代数を使って統一的に考察した。

Hamilton 多項式

2 変数の多項式環 $\mathbb{C}[t_1, t_2]$ を少し twist した環、即ち、 $t_2 t_1 = t_1 t_2$ の代わりに、

$$t_2 t_1 = -t_1 t_2$$

なる関係を入れた結合代数を

$$\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$$

で表し、**Hamilton 多項式環**と呼ぶ。

$\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ の中心（任意の元と可換な元からなる部分代数）は t_1^2 と t_2^2 を変数とする通常の多項式環

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2]$$

であり、 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ は Z 上の quaternion 代数である。

面白い性質として、

$$(t_1 + t_2)^2 = t_1^2 + t_2^2$$

がある。

さらに、通常の多項式環 $\mathbb{C}[z_3, \dots, z_n]$ ($n \geq 3$) とのテンソル積

$$\mathbb{C}_h[t_1, t_2, z_3, \dots, z_n] := \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z_3, \dots, z_n]$$

を n 変数の **Hamilton 多項式環**と呼ぶ。

また、**2 重 Hamilton 多項式環**

$$\mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4] := \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_h[t_3, t_4]$$

そして **3 重 Hamilton 多項式環**

$$\mathbb{C}_{3h}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6] := \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_h[t_3, t_4] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_h[t_5, t_6]$$

なども重要となる。

Cayley-Dickson process

E を involution $\bar{}$ をもつ代数とする。

ただし、involution とは位数 2 の anti-automorphism のことである。

まず、 $0 \neq \mu \in E$ と、 E の形式的コピー Ev (1 次元自由加群) を用意する。このとき、

$$(E, \mu) := E \oplus Ev$$

に、

$$(a + bv)(c + dv) = ac + \bar{d}\mu b + (da + b\bar{c})v \quad (a, b, c, d \in E) \quad (1)$$

なる積を与えた代数を、 $E = (E, \bar{})$ から構成された、構造定数 μ の **Cayley-Dickson 代数** と呼ぶ。特に、

$$v^2 = \mu$$

に注意しよう。

例 E を Hamilton の 4 元数体

$$E = \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}ij,$$

$\bar{}$ を通常の共役作用素、 $\mu = -1$ とすれば、 $(\mathbb{H}, -1)$ は Cayley number $\mathbb{O}$ となる。

もっと身近な例は、 $\mathbb{R}$ の恒等変換を involution にとれば、 $(\mathbb{R}, -1) = \mathbb{C}$ であり、 $\mathbb{C}$ の通常の共役を involution にとれば、 $(\mathbb{C}, -1) = \mathbb{H}$ となる。

また、 $(\mathbb{C}, 1)$ は 2 次行列全体 $M_2(\mathbb{R})$ に同型となる。

さらに、同じ $\mathbb{H}$ において、

$$\bar{i} = -i \quad \text{and} \quad \bar{j} = j$$

で定まる involution で、 $\mu = j$ とすれば、 $(\mathbb{H}, j)$ は 8 次元の代数となる。

これを **quartic octonion** と呼び、 $\mathbb{O}'$ で表すことにする。さらに、

$$v := \sqrt{j}$$

と書けば、

$$\mathbb{O}' = (\mathbb{H}, j) = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\sqrt{j}$$

となる。また、(1) をよく見れば、

$$(i\sqrt{j})\sqrt{j} = ji = -ij \quad \text{同様に} \quad \sqrt{j}(\sqrt{j}i) = -ji$$

が成り立つので、 $\mathbb{O}'$ は交代代数ではない。それでも

$$\sqrt{j}i = -i\sqrt{j}, \quad \text{や} \quad i(i\sqrt{j}) = -\sqrt{j} \quad \text{そして} \quad (\sqrt{j}i)i = -\sqrt{j}$$

は成り立つので、 $\mathbb{O}$ に似ている。また、 $\mathbb{O}'$ は巾結合法則 (power associative law) を満たさない。たとえば

$$(i + \sqrt{j})(i + \sqrt{j})^2 \neq (i + \sqrt{j})^2(i + \sqrt{j})$$

である。

★ Allison により $\mathbb{O}'$ は**単純** structurable 代数であることが示された。

Cayley 多項式

まず、 n 変数の Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2, z_3, \dots, z_n]$ において、

$$\bar{t}_1 = -t_1, \quad \bar{t}_2 = -t_2, \quad \bar{z}_i = z_i \quad (i = 3, \dots, n)$$

で定義される involution を **標準 involution** と呼ぶ。

3 変数の Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2, z]$ とこの標準 involution $-$ に対して、 z を構造定数とする Cayley-Dickson 代数

$$\mathbb{C}_h[t_1, t_2, z] \oplus \mathbb{C}_h[t_1, t_2, z]v$$

を考える。このとき、 $v^2 = z$ となるので、

$$v := t_3 \quad \text{とおけば} \quad z = t_3^2$$

と書ける。この Cayley-Dickson 代数を $\mathbb{C}_c[t_1, t_2, t_3]$ で表し、**Cayley 多項式環** と呼ぶ。

基本関係式として

$$t_2 t_1 = -t_1 t_2, \quad t_3 t_1 = -t_1 t_3, \quad t_3 t_2 = -t_2 t_3,$$

さらに

$$(t_1 t_2) t_3 = -t_1 (t_2 t_3)$$

も満たす。

Cayley 多項式環の中心（任意の元と可換かつ結合的な元全体）は、通常が多項式環

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2]$$

であり、Cayley 多項式環は Z 上の octonion 代数となる。

興味深い等式として、

$$(t_1 + t_2 + t_3)^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$

がある。

エルミート型ジョルダン多項式

一般に、代数 A があれば、その**プラス代数** $A^+ = (A, \cdot)$ を

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx) \quad (x, y \in A)$$

によって定義できる。また、 A が involution $*$ を持てば、 A^+ の部分代数

$$H(A, *) = \{x \in A \mid x^* = x\}$$

が興味深い存在となる。

特に A が交代代数ならば A^+ はジョルダン代数になる。

(従って A が結合代数 $\implies A^+$ はジョルダン代数)

ジョルダン代数 A^+ やその部分代数 $H(A, *)$ は**エルミート型ジョルダン代数**と呼ばれる。
さらに、 A が上で定義した多項式環の場合は、**エルミート型ジョルダン多項式環**と呼ぶ。

例 1 $A_1 = \mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ (Hamilton 多項式環) とし、 $*$ を main involution, 即ち

$$t_1^* = t_1, \quad t_2^* = t_2$$

で定義される involution とすれば、 $J_1 := H(A_1, *)$ はエルミート型ジョルダン多項式環の例となる。 J_1 の中心 (任意の元と結合的な元全体) は

$$Z_1 := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2]$$

となり、 J_1 は Z_1 上の 3 次元自由加群で、その基底として $\{1, t_1, t_2\}$ が取れる。

例 2 $A_2 = \mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4] = \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_h[t_3, t_4]$ (2 重 Hamilton 多項式環) とし、 $-$ を標準 involution のテンソル積、即ち

$$\bar{t}_1 = -t_1, \quad \bar{t}_2 = -t_2, \quad \bar{t}_3 = -t_3, \quad \bar{t}_4 = -t_4$$

とすれば、 $J_2 := H(A_2, -)$ はエルミート型ジョルダン多項式環の例となる。

J_2 の中心は

$$Z_2 := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2]$$

となり、 J_2 は Z_2 上の 10 次元自由加群で、その基底として

$$B := \{1, t_1 t_3, t_1 t_4, t_1 t_3 t_4, t_2 t_3, t_2 t_4, t_2 t_3 t_4, t_1 t_2 t_3, t_1 t_2 t_4, t_1 t_2 t_3 t_4\}$$

が取れる。

(注) $10 = 1 + {}_2C_2 \times 3^2$.

Albert 多項式

$\omega \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 3 乗根とする。

Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ は $t_2 t_2 = -t_1 t_2$ で定義されたが、今度は、

$$t_2 t_2 = \omega t_1 t_2$$

で定義された twisted 多項式環を考え、これを $\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2]$ で表すことにする。

$\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2]$ の中心は、多項式環

$$Z_3 := \mathbb{C}[t_1^3, t_2^3]$$

であり、 $\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2]$ は Z_3 上 9 次元の代数である。ここでは

$$(t_1 + t_2)^3 = t_1^3 + t_2^3$$

が成立する。

一般に、**1st Tits construction** と呼ばれる、ある種 (central simple) の 9 次元結合代数 A から、27 次元例外ジョルダン代数を構成する方法がある。

Cayley-Dickson 代数は doubling process であったが、今度は tripling process となる。

Cayley-Dickson 代数同様、構造定数 $\mu \in Z$ (A の中心) によって特徴付けられるので、 (A, μ) で表す。積の規則は少し複雑なので省略するが、

$$(A, \mu) = A \oplus Av \oplus Av^2 \tag{2}$$

なる分解があり、

$$v^3 = \mu$$

なる関係がある。

例 9 次元結合代数 $A = M_3(\mathbb{R})$ において、 $\mu = 1$ とすれば、1st Tits construction (A, μ) は 27 次元例外ジョルダン代数

$$H_3(\mathbb{O}_z)$$

になる。但し、 $\mathbb{O}_z$ は Zorn's vector-matrix algebra (split octonion) である。

—— 誤りです !! 削除して下さい。 ——

また、 $\mu = -1$ とすれば、 (A, μ) は

$$H_3(\mathbb{O})$$

である。

さて、結合代数

$$\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, z] = \mathbb{C}_\omega[t_1, t_2] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z]$$

の中心は

$$Z := Z_3 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[t_1^3, t_2^3, z]$$

であり、 $\mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, z]$ は Z 上 9 次元結合代数となる。そこで、構造定数 $z \in Z$ に対して 1st Tits construction (2) を適用させ、さらに、

$$t_3 := v \quad \text{とおけば} \quad t_3^2 = v^2 \quad \text{そして} \quad t_3^3 = z$$

となる。この新しい多項式環を $\mathbb{C}_a[t_1, t_2, t_3]$ で表し、**Albert 多項式環**と呼ぶ。ここには

$$\mathbb{C}_a[t_1, t_2, t_3] = \mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, t_3^3] \oplus \mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, t_3^3]t_3 \oplus \mathbb{C}_\omega[t_1, t_2, t_3^3]t_3^2$$

なる分解がある。

Albert 多項式環の中心は

$$Z := \mathbb{C}[t_1^3, t_2^3, t_3^3]$$

となり、 $\mathbb{C}_a[t_1, t_2, t_3]$ は Z 上の Albert 代数となる。

ここでの興味深い等式は、

$$t_1(t_1 t_2) = -\frac{1}{2}t_1^2 t_2 \quad \text{や} \quad t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3) = \omega(t_1 \cdot t_2) \cdot t_3$$

そして

$$(t_1 + t_2 + t_3)^3 = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3$$

などである。

structurable 多項式環

$\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ や $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$ はもはや交代代数ではないが、単純 structurable 代数となる。
これと平行して、

$$\mathbb{C}_h[t_1, t_2] \otimes \mathbb{C}_c[t_3, t_4, t_5] \quad \text{や} \quad \mathbb{C}_c[t_1, t_2, t_3] \otimes \mathbb{C}_c[t_3, t_4, t_5]$$

が興味深い structurable 多項式環の例となる。

また、 $\mathbb{C}_h[t_1, t_2]$ において、

$$\bar{t}_1 = -t_1 \quad \text{そして} \quad \bar{t}_2 = t_2$$

で定まる involution をとり、構造定数 $\mu = t_2$ の Cayley-Dickson 代数

$$(\mathbb{C}_h[t_1, t_2], t_2)$$

を **quartic Cayley 多項式環** と呼ぶ。さらに

$$\sqrt{t_2} := v$$

と置けば

$$(\mathbb{C}_h[t_1, t_2], t_2) = \mathbb{C}_h[t_1, t_2] \oplus \mathbb{C}_h[t_1, t_2]\sqrt{t_2}$$

と書けるので、quartic Cayley 多項式環を $\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ で表すことにする。

$\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ の中心（任意の元と可換かつ結合的な元全体）は

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2]$$

であり、 $\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ は Z 上の quartic octonion 代数（8次元）となる。

ここでも、

$$(t_1\sqrt{t_2})\sqrt{t_2} = -t_1t_2 \quad \text{そして} \quad \sqrt{t_2}(\sqrt{t_2}t_1) = -t_2t_1$$

となるので交代代数ではない。ただ、

$$\sqrt{t_2}t_1 = -t_1\sqrt{t_2}, \quad \text{や} \quad t_1(t_1\sqrt{t_2}) = t_1^2\sqrt{t_2} \quad \text{そして} \quad (\sqrt{t_2}t_1)t_1 = \sqrt{t_2}t_1^2$$

は成り立つ。

また、 $\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ は**非**結合的（not power associative）である。たとえば、

$$(t_1 + \sqrt{t_2})(t_1 + \sqrt{t_2})^2 \neq (t_1 + \sqrt{t_2})^2(t_1 + \sqrt{t_2})$$

である。この $\mathbb{C}_c[t_1, \sqrt{t_2}]$ も興味深い structurable 多項式環となる。

Allison-Faulkner process

K を可換結合代数、 J を K 上の可換代数とする (たとえば Jordan 代数)。

$\theta : J \longrightarrow J$ を位数 2 の線形変換とする。

1984 年、Allison と Faulkner は新しい Cayley-Dickson 代数を考案した。これは

$$(J, \mu) = J \oplus Jv$$

に対して積を

$$(a + bs)(c + ds) = (ac + \mu(bd^\theta)^\theta) + (a^\theta d + (b^\theta c^\theta)^\theta)s$$

と定義した代数である。Allison と Faulkner は、 J がある種のジョルダン代数なら (J, μ) は単純 structurable 代数になることを証明した。

例 上の例で考察したように、2 重 Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4]$ に対して、エルミート型ジョルダン多項式環 $H(\mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4], \neg)$ は、中心 $\mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2]$ 上

$$B := \{1, t_1 t_3, t_1 t_4, t_1 t_3 t_4, t_2 t_3, t_2 t_4, t_2 t_3 t_4, t_1 t_2 t_3, t_1 t_2 t_4, t_1 t_2 t_3 t_4\}$$

を基底とする 10 次元自由加群であった。

この 2 重 Hamilton 多項式環に通常の変数 z を加えた $\mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4, z]$ に対しても、中心は

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, z]$$

であり、 Z 上の基底は依然 B である。即ち、

$$J_{10} := H(\mathbb{C}_{2h}[t_1, t_2, t_3, t_4, z], \neg)$$

は Z 上 10 次元のエルミート型ジョルダン多項式環である。

ここで、 $\theta : J_{10} \longrightarrow J_{10}$ を $t \in B \setminus \{1\}$ に対して、

$$\theta(t) = -t \quad \text{そして} \quad \theta(1) = 1$$

で定義する。そして $\mu = z$ として Cayley-Dickson 代数

$$(J_{10}, z) = J_{10} + J_{10}v$$

を構成する。前と同様、

$$t_5 := v \quad \text{とすれば} \quad t_5^2 = z$$

となるから、 (J_{10}, z) は t_1 から t_5 を変数とする多項式環に似ている。この中心は J_{10} の中心と同じで

$$Z = \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, t_5^2]$$

となる。ここで、通常が多項式環 $\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5]$ は Z 上 $2^5 = 32$ 次元だが、 (J_{10}, z) は Z 上 20 次元である。

これも興味深い structurable 多項式環となる。

最後に、3重 Hamilton 多項式環 $\mathbb{C}_{3h}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, z]$ とその標準 involution $-$ から同様に構成した、中心

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, t_5^2, t_6^2, z]$$

上 28 次元のエルミート型ジョルダン多項式環

$$J_{28} := H(\mathbb{C}_{3h}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, z], -)$$

を考える。(注) $28 = 1 + {}_3C_2 \times 3^2$.

そして J_{28} 上に θ を J_{10} と同じように定義して、Allison-Faulkner 代数

$$S_{56}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7] := (J_{28}, z) = J_{28} + J_{28}t_7$$

$(t_7^2 = z)$ を構成すれば、これも興味深い structurable 多項式環となる。中心は

$$Z := \mathbb{C}[t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, t_5^2, t_6^2, t_7^2]$$

であり、 $S_{56}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7]$ は、 Z 上 $28 + 28 = 56$ 次元となる。

通常が多項式環 $\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7]$ なら Z 上 $2^7 = 128$ 次元である。

中心 Z の商体を $\bar{Z}$ とすれば、 $S_{56}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7]$ の中心閉包

$$S_{56}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7] \otimes_Z \bar{Z}$$

は $\bar{Z}$ 上 56 次元 Brown 代数である。

他にも興味深い新種の多項式環がある。詳しくは

“Structurable tori”, communications in Algebra, [AFY] (2009)

を参照して欲しい。